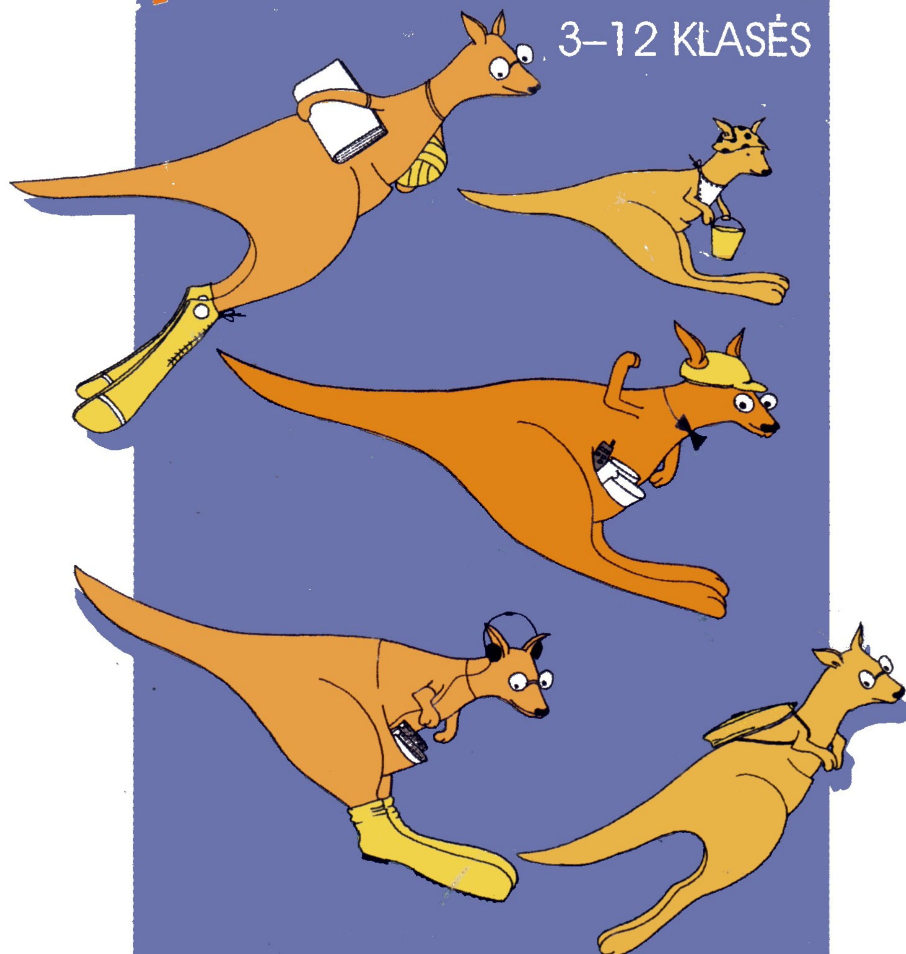
KENGŪRA 2002



TARPTAUTINIO MATEMATIKOS

K O N K U R S O

UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

КЕНГУРУ 2002

KANGUR 2002

KENGŪROS KONKURSO ORGANIZAVIMO KOMITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

KENGŪRA 2002

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI

Sudarė JUOZAS MAČYS

TEV

VILNIUS 2002

UDK 51(079)
Ke108

Lietuvos Respublikos Švietimo ir mokslo ministerijos rekomenduota

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*
Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Nijolė Drazdauskienė*
Konsultantai: *Marytė Stričkienė*, *Elmundas Žalys*

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

ISBN 9955-491-29-9

TURINYS

ATMINTINĖ

KONKURSO DALYVIUI

- Perskaityk dalyvio kortelės pildymo instrukciją.
- Prieš pradėdamas spręsti užpildyk dalyvio kortelę. Kortelę pildyk pieštuku, kad suklydęs galėtum ištrinti. Nepamiršk įrašyti savo pavardę ir vardą didžiosiomis raidėmis grafoje „Pavardė ir vardas“.
- Uždavinių sprendimui skiriamos 75 minutės – nesustok prie vieno uždavinio ilgiau kaip 3 minutėms, kol neperžiūrėsi visų uždavinių.
- Iš penkių pateiktų uždavinio atsakymų teisingas tik vienas – išsirink jį!
- Būk atidus užpildydamas atsakymų lentelę.
- Atmink, kad spėliodamas rizikuoji – už neteisingą atsakymą atimami taškai.
- Atsakymų nerodyk draugui – gali nukentėti pats.
- Neskubėk įteikti kortelę anksčiau laiko – geriau dar kartą patikrink atsakymus.





PRATARMĖ

Vienos iš populiariausių moksleivių matematikos varžybų yra tarptautinis „Kengūros“ žaidimas-konkursas. Prasidėjęs Australijoje, jis greitai išplito Europoje. 1994 metais buvo įkurta asociacija „Kengūra be sienų“ (*Kangourou sans frontières*), kuriai priklauso 30 šalių iš Europos ir Amerikos.

Lietuvoje „Kengūros“ konkursą rengia „Kengūros“ konkurso organizavimo komitetas, į kurį įeina Švietimo ir mokslo ministerijos, Matematikos ir informatikos instituto, Vilniaus universiteto ir mokyklų atstovai. Kaip konkursas organizuojamas, pasakojama matematikos ir informatikos žurnale „Alfa plius omega“, 2000, Nr. 1, kurį galima rasti mokyklų bibliotekose.

Kad mokiniai galėtų geriau pasirengti konkursams, organizavimo komiteto bei Matematikos ir informatikos instituto rūpesčiu nuo 1999 metų kasmet yra išleidžiamos konkurso užduočių ir sprendimų knygelės. Ši knygelė tęsia seriją.

Lietuvoje, kaip ir daugelyje šalių, 2002 metų konkursas įvyko kovo 21 dieną (sutinkamai su nustatyta formule — kovo trečią ketvirtadienį). Konkurse dalyvavo 51 034 moksleiviai iš 1040 Lietuvos mokyklų. Visiems konkurse dalyvavusiems moksleiviams buvo įteikti gražūs konkurso organizavimo komiteto padėkos pažymėjimai. Kiekvienas mokinys atminimui gavo suvenyrinį „Kengūros“ pieštuką ir konkurso užduočių lapelį.

Visus uždavinius išsprendę „mažyliai“ birželio mėnesį dalyvavo papildomame konkurse išaiškinti pačius stipriausius, kuris įvyko Matematikos ir informatikos institute (žr. internete). Geriausieji „mažyliai“ ir „bičiuliai“ buvo pakviesti dalyvauti Šiaulių ir Vilniaus universitetų organizuotose Lietuvos jaunesniųjų klasių olimpiadose. Šeši geriausiai konkurse pasirodę „kadetai“ kartu su dar šešiais lenkų mokyklų moksleiviais vyko į tarptautinę „kengūrininkų“ vasaros stovyklą Zakopanėje (Lenkija). Būrys mūsų geriausiųjų „kadetų“ birželio mėnesį ilsėjosi ir treniravosi Karklėje prie Baltijos jūros. Vyresniųjų klasių nugalėtojai dalyvavo matematikos stovyklose Vilniuje, Minske ir Kijeve, kur turėjo progos pabendrauti su savo bendraamžiais — Lietuvos, Baltarusijos ir Ukrainos matematikos olimpiadų nugalėtojais. Iš visų grupių po vieną atstovą pateko į Lietuvos komandą, kuri liepos mėnesį dalyvavo antrajame „Kengūros“ komandiniame čempionate Rumunijos kalnų kurorte Poiana Pinului. (Šaunaus penktoko iš Klaipėdos Rolando Glotnio įspūdžius apie varžybas ir kelionę galima rasti internete http://www.kengura.lt ir žurnale „Alfa plius omega“, 2002, Nr. 2.) Visi kiti sėkmingai pasirodę dalyviai išsidalijo gausybę prizų — knygų ir specialių „Kengūros“ dovanų.

Tuo tarpu „Kengūra“ jau ruošiasi naujiems turnyrams. Kartą metuose „Kengūros“ asociacijos šalių atstovai susirenka į suvažiavimą. Šiemet toks suvažiavimas įvyko Riminyje (Italija) spalio 18–20 dienomis. Jame buvo apsvarstytos užduotys, siūlomos 2003 metų konkursui. Prieš suvažiavimą didžiulį darbą atliko Uždavinių komitetas, kuris iš daugybės uždavinių, atsiųstų iš įvairių šalių, atrinko po 100 uždavinių kiekvienai iš 5 konkurso grupių. Tokį rinkinį gavo kiekvienos šalies atstovai. Beje, vieni uždaviniai jame buvo pateikti anglų, kiti — prancūzų kalba, todėl suvažiavimo dalyviai turėjo gaudytis abiejose kalbose. Iš viso sąrašo balsuojant buvo sudaryti rekomenduojami užduočių variantai (kaip įprasta „Mažylio“ grupei — 24 uždaviniai, kitoms grupėms — po 30 uždavinių). Po to tie variantai buvo tikslinami, redaguojami, tad išvažiuodama kiekviena šalis turėjo angliškai parengtą preliminarų užduočių rinkinį (beje, be sprendimų).

Konkurso metu negalima naudotis skaičiuokliais. Konkursas testinis — tai reiškia, kad tik vienas atsakymas iš 5 pateiktų yra teisingas, ir jūs turite tą atsakymą nustatyti. Gautą atsakymą dalyvis nurodo savo kortelėje (dalyvio kortelės pavyzdys įdėtas 7–8 psl.; ten paaiškinta, kaip ją reikia užpildyti). Jeigu jūs beveik neabejojate atsakymu, tai geriausia pasirašyti sau tą atsakymą, pasižymėti jį, sakykime, klaustuku, ir grįžti prie jo tik tada, jei liktų laiko (beje, jo greičiausiai neliks). Todėl konkursui ir reikia ruoštis specialiai, ne kaip egzaminui ar olimpiadai: čia įrodinėti nieko nereikia. Dėl šios priežasties konkursas yra labai demokratiškas — sakysime, labai geras, bet lėtas olimpiadininkas gali parodyti blogesnį rezultatą negu pritingintis, bet greitos orientacijos mokinys.

Vertinant darbus už teisingą atsakymą duodamas prieš uždavinį nurodytas taškų skaičius, už nenurodytą atsakymą — 0 taškų, už neteisingą atsakymą atimama 25% už uždavinį skiriamų taškų. Kad nebūtų neigiamų rezultatų, kiekvienam dalyviui iš karto skiriama 30 taškų („mažyliams“ — 24 taškai). Vadinasi, teoriškai dalyvis gali gauti nuo 0 iki 150 taškų („mažyliai“ — nuo 0 iki 120 taškų).

Šioje knygelėje pateiktos 2002 m. „Kengūros“ konkurso užduotys ir jų sprendimai. Kad mokinys galėtų pasitreniruoti ir pasitikrinti, knygelės gale yra duota visų užduočių teisingų atsakymų lentelė. Mokinys galėtų daryti taip: pasiimti iš pradžių, pavyzdžiui, žemesnės klasės testą ir atlikti jį per 75 minutes. Po to jis gali pasitikrinti atsakymus ir spręsti apie savo galimybes. Lygiai tą patį jis gali atlikti su savo ar vyresnės klasės testu — dauguma vyresniųjų klasių užduočių taip pat prieinamos jaunesniems mokiniams.

Knygelėje pateikti visų uždavinių detalūs sprendimai, ir pasitreniravus galima juos tiesiog skaityti. Kad būtų patogiau, sprendimų dalyje po uždavinio numerio iš karto nurodoma, kuris atsakymas teisingas.

? Ženklu **?** pažymėtas spėjimas, kuris retkarčiais būna klaidingas. Žinoma, dažniausiai tas spėjimas yra beveik sprendimas, tik spėjime visą laiką remiamasi tuo, kad teisingas yra vienintelis iš penkių siūlomų pasirinkti atsakymų. Todėl atspėjus atsakymą ir pasitikrinus, kad jis tinka, nieko daugiau daryti nebereikia. Kai spėti atsakymą beprasmiška, spėjimas iš viso neduodamas ir iš karto pereinama prie sprendimo. Dar kartą pabrėžiame — rengiantis „Kengūros“ konkursui visiškai pakanka pabandyti savarankiškai paspręsti uždavinius ir paskaityti klaustuko ženklu pažymėtus „spėjimus“ ar trumpą sprendimą.

?? Ženklu **??** pažymėti kiti spėjimo būdai.

! Ženklu **!** žymimas griežtas sprendimas. Suprantama, perskaityti sprendimą labai naudinga: čia įrodoma, kad kiti atsakymai netinka, mokoma logiškai samprotauti. Tai visada pravers laikant egzaminus ar dalyvaujant olimpiadose. Beje, būtent „Kengūros“ konkursui sugalvojama daugybė naujų gražių uždavinių. Po to tuos uždavinius galima atpažinti visur — olimpiadose, valstybinių egzaminų užduotyse ir vadovėliuose.

!! Ženklu **!!** žymimas kitas sprendimas, dažniausiai trumpesnis, bet reikalaujantis daugiau žinių. Taip pat keliais šauktukais žymimos pastabos, siūlomi sunkesni panašūs uždaviniai, komentarai mokytojui ir kt.

Kaip daug gali skirtis uždavinio atsakymo spėjimas (pakankamas dalyvaujant konkurse) ir to uždavinio sprendimas, labai gerai matyti, pavyzdžiui, iš uždavinio J14 (žr. jo sprendimą 57 psl.). Atspėti uždavinio atsakymą čia paprasta, o griežtai išspręsti uždavinį — sunku (ir netgi nelabai įdomu).

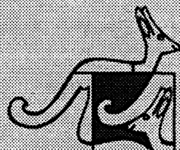
Dalyvio kortelė

KODAS

Tarptautinis matematikos konkursas
K E N G Ū R A

Mokykla

Klasė 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Grupė	
Mažylis	M
Bičiulis	B
Kadetas	K
Jaunioras	J
Senjoras	S

Kalba	
Lietuvių	L
Lenkų	P
Rusų	R

PAVARDĖ VARDAS

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą	Ą
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č	Č
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E	E
Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę	Ę
Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė	Ė
F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I
Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į	Į
Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J	J
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L	L
M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O	O
P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P	P
R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R	R
S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š	Š
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U	U
Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų	Ų
Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū	Ū
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z
Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž	Ž
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

ATSAKYMAI

1	A	B	C	D	E
2	A	B	C	D	E
3	A	B	C	D	E
4	A	B	C	D	E
5	A	B	C	D	E
6	A	B	C	D	E
7	A	B	C	D	E
8	A	B	C	D	E
9	A	B	C	D	E
10	A	B	C	D	E

11	A	B	C	D	E
12	A	B	C	D	E
13	A	B	C	D	E
14	A	B	C	D	E
15	A	B	C	D	E
16	A	B	C	D	E
17	A	B	C	D	E
18	A	B	C	D	E
19	A	B	C	D	E
20	A	B	C	D	E

21	A	B	C	D	E
22	A	B	C	D	E
23	A	B	C	D	E
24	A	B	C	D	E
25	A	B	C	D	E
26	A	B	C	D	E
27	A	B	C	D	E
28	A	B	C	D	E
29	A	B	C	D	E
30	A	B	C	D	E

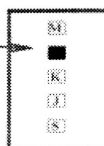
KENGŪRA

Dalyvio kortelės pildymo instrukcija

TEISINGAS KORTELĖS UŽPILDYMAS YRA TESTO DALIS!

1. Kortelę pildykite tik minkštu arba vidutinio kietumo juodu pieštuku (B arba HB).
2. Žymėdami raidę ar skaičių, visiškai užtušuokite atitinkamą langelį.

GERAI užtušuoto langelio pavyzdys



Taip žymėti NEGALIMA



3. Jei žymėdami suklydote, IŠTRINKITE žymėjimą trintuku ir žymėkite dar kartą.

4. Įrašykite savo mokyklos pavadinimą nurodytoje vietoje.

5. Pažymėkite, kurioje klasėje mokotės, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį eilutėje „Klasė".

6. Pažymėkite, kurioje konkurso grupėje Jūs dalyvaujate, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį stulpelyje „Grupė".

7. Pažymėkite, kuria kalba mokotės, t. y. užtušuokite atitinkamą langelį stulpelyje „Kalba".

8. Užrašykite raidėmis ir atitinkamai pažymėkite savo pavardę ir vardą. Įrašę vardo ar pavardės raidę į langelį, užtušuokite atitinkamą langelį tame pačiame stulpelyje. Viename stulpelyje gali būti pažymėta tik viena raidė. Tarp pavardės ir vardo palikite tuščią langelį ir tame stulpelyje nieko nežymėkite. Jei Jūsų vardas netelpa eilutėje, tai jį sutrumpinkite – į paskutinį langelį įrašykite tašką ir jį pažymėkite.

KLIVYTĖ G.

9. Išsprendę testo uždavinį, pažymėkite pasirinktą atsakymą dalyvio kortelėje – užtušuokite atitinkamą langelį uždavinio numerį atitinkančioje atsakymų eilutėje.

10. Už teisingą atsakymą skiriami visi uždavinio taškai. Už nenurodytą atsakymą skiriama 0 taškų, o už klaidingą atsakymą iš visų testo taškų bus atimta 25% uždavinio taškų.

11. ŠIOS DALYVIO KORTELĖS NEGALIMA LANKSTYTI AR GLAMŽYTI.

Atlikę užduotį, konkurso organizaciniam komitetui grąžinkite tik šią kortelę. Užduočių lapelis ir sprendimai lieka Jums.

Stengiantis padėti pasirengti konkursui rusų ir lenkų mokyklų moksleiviams, į knygelę taip pat įdėtos 2002 m. užduotys rusų ir lenkų kalbomis. Tai ypač svarbu žemesniųjų klasių moksleiviams, kuriems skaityti matematinį tekstą lietuviškai sunku. Ta proga galima prisiminti, kad Pasaulio matematikos olimpiadoje IMO visi moksleiviai gauna sąlygas ir rašo sprendimus gimtąja kalba.

Nuoširdžiai dėkojame:

- visiems dalyviams bei konkurso organizatoriams miestuose, rajonuose ir mokyklose, pasistengusiems, kad konkursas vyktų sklandžiai;
- Matematikos ir informatikos institutui, padėjusiam rengti konkursą, bei leidyklai TEV, atlikusiai didžiumą organizacinės veiklos ir visokeriopai rėmusiai konkursą;
- Švietimo ir mokslo ministerijai, glaudžiai bendradarbiavusiai su organizavimo komitetu ir palaikiusiai nuolatinį ryšį su mokyklomis.

2003 metų konkursas įvyks kovo 20 dieną, o sąlygos, kaip ir pernai, bus parengtos lietuvių, lenkų ir rusų kalbomis.

Sėkmės rengiantis konkursui! Kviečiame gausiai dalyvauti!

Visais iškilusiais klausimais prašom kreiptis į organizavimo komitetą — tel.: (8-5) 2729318, internetas: http://www.tev.lt, http://www.kengura.lt, el. paštas: tev@tev.lt, adresas: Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-2021 Vilnius.

Organizavimo komitetas ir leidėjai

2002 m. konkurso užduočių sąlygos

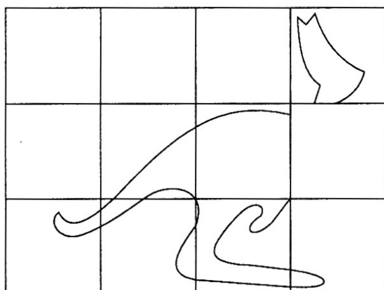
MAŽYLIS (III ir IV klasės)



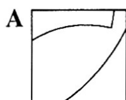
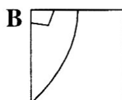
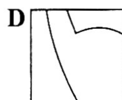
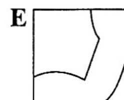
KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

M1. Apskaičiavę $2+2-2+2-2+2-2+2-2+2$, gausime
A 0 **B** 2 **C** 4 **D** 12 **E** 20

M2. Žemiau matome kengūros mozaiką be vieno kvadratėlio.

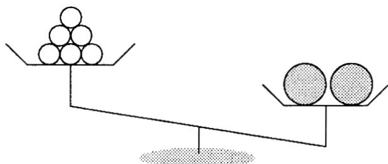


Kuris iš žemiau pavaizduotų kvadratėlių buvo iš mozaikos pašalintas?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

M3. Andrius gimimo dieną iš draugų gavo dovanų dešimt tušinukų, tris automobiliukus, keturis kamuolius, tris meškiukus, dvi plyteles šokolado ir knygą. Kiek daiktų jis gavo?
A 15 **B** 17 **C** 20 **D** 23 **E** 27

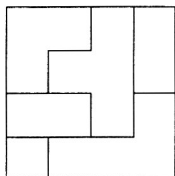
M4. Ant vienos svarstyklių lėkštelės padėti 6 apelsinai, o ant kitos — 2 melionai. Kai padedame tokį pat trečią melioną prie apelsinų, svarstyklės pasidaro pusiausviros.



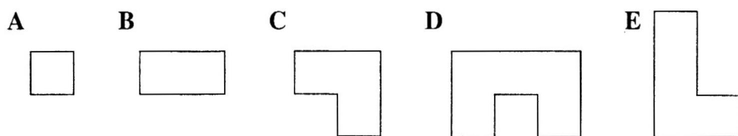
Kiek apelsinų sveria tiek pat, kaip vienas melionas?
A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6

M5. Juozas gyvena trumpoje gatvelėje, kurios namų numeriai yra nuo 1 iki 24. Kiek kartų namų numeriuose pasikartoja skaitmuo 2?
A 2 **B** 4 **C** 8 **D** 16 **E** 32

M6. Žemiau pavaizduotas kvadratas.

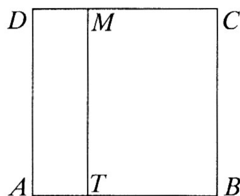


Kurios iš pateiktų figūrų *negausime*, sukarpę jį pagal nubrėžtas linijas?



M7. Žmogaus širdis muša maždaug 70 kartų per minutę. Kiek kartų ji apytikriai muša per 1 valandą?
A 42 000 **B** 7 000 **C** 4 200 **D** 700 **E** 420

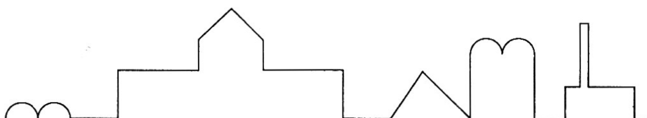
M8. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 10 cm. Stačiakampio $ATMD$ trumpesnioji kraštinė lygi 3 cm.



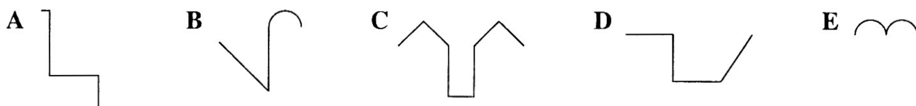
Keliais centimetrais kvadrato $ABCD$ perimetras didesnis už stačiakampio $ATMD$ perimetrą?
A 14 **B** 10 **C** 7 **D** 6 **E** 4

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

M9. Paveikslėlyje matome pilies kontūrą.



Kuri iš žemiau pavaizduotų linijų *nėra* to kontūro dalis?

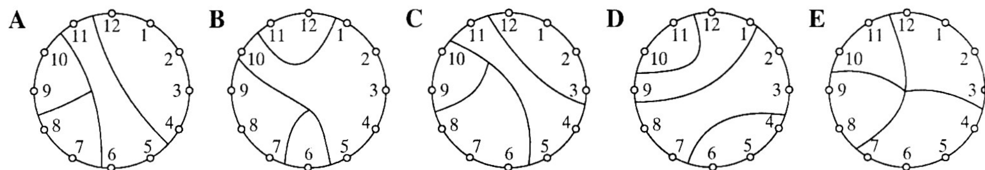


M10. Prie mažiausio dviženklio skaičiaus pridedame 17. Gautą sumą padaliję iš didžiausio vienaženklio skaičiaus, gausime
A 3 **B** 6 **C** 9 **D** 11 **E** 27

M11. Kadaise vienoje šalyje vienetas buvo žymimas ženklu , dešimt — ženklu , o šešiasdešimt — ženklu . Pavyzdžiui, skaičius 22 buvo užrašomas taip: . Kuris užrašas reiškia skaičių 124?

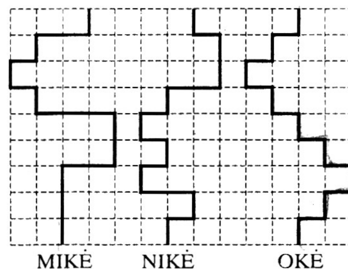
A **B** **C**
D **E**

M12. Laikrodžio ciferblatas suskilo į 4 dalis. Kiekvienoje dalyje esančių skaičių sumos yra paeiliui einantys skaičiai. Kuriame iš paveikslėlių pavaizduotas tas ciferblatas?



M13. Julius, Matas, Vytas ir Tadas turi katę, šunį, žuvytę ir kanarėlę — kiekvienas po vieną gyvūną. Matas turi gyvūną su kailiu, Tadas turi keturkojį gyvūną, Vytas turi paukštį, o Julius ir Matas nemėgsta kačių. Kuris sakinys *neteisingas*?
A Tadas turi šunį **B** Vytas turi kanarėlę **C** Julius turi žuvytę
D Tadas turi katę **E** Matas turi šunį

M14. Šokinėjimo zigzagais varžybose kengūros Mikė, Nikė ir Okė įveikė pavaizduotas distancijas. Kengūros šokinėjo tuo pačiu greičiu. Kuris sakinys teisingas?
A Mikė ir Okė finišavo vienu metu
B Nikė buvo pirma
C Okė buvo paskutinė
D Visos finišavo vienu metu
E Mikė ir Nikė finišavo vienu metu

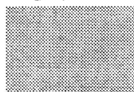


M15. Julė, Kamilė, Zita ir Elena yra gimusios kovo 1, gegužės 17, liepos 21 ir kovo 21 d. Kamilė ir Zita gimusios tą patį mėnesį, o Julės ir Zitos gimimo dienos žymimos tuo pačiu skaičiumi. Kuri iš mergaičių gimė gegužės 17 d.?
A Julė **B** Kamilė **C** Zita **D** Elena **E** Nustatyti neįmanoma

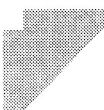
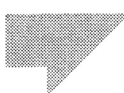
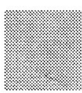
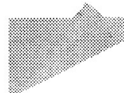
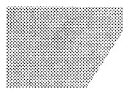
M16. Samanta ir Jolanta kartu turi 60 degtukų. Samanta paėmė tiek degtukų, kiek jų reikėjo sudėti trikampiui, kurio kiekvienos kraštinės ilgis šeši degtukai. Iš likusių degtukų Jolanta sudėjo stačiakampį, kurio vieną kraštinę taip pat sudarė šeši degtukai. Kiek degtukų buvo didesnėje stačiakampio kraštinėje?
A 30 **B** 18 **C** 15 **D** 12 **E** 9

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

M17. Iš popieriaus iškirptas stačiakampis.

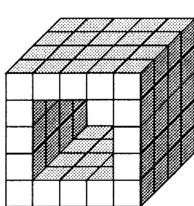
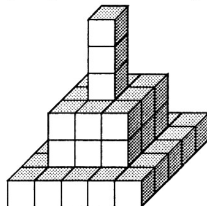


Kuri iš pavaizduotų figūrų *negalėjo* susidaryti, perlenkus jį vieną kartą?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

M18. Marytė išeina iš namų 6:55 ir ateina į mokyklą 7:32. Jos draugei Zitai į mokyklą reikia eiti 12 minučių mažiau. Vakar Zita atėjo į mokyklą 7:45. Kada ji išėjo iš namų?
A 7:07 **B** 7:20 **C** 7:25 **D** 7:30 **E** 7:33

M19. Robertas sustatė tunelį iš vienodų kubelių. Kai jam nusibodo, jis perstatė tunelį į pilnavidurę piramidę (žr. paveikslėlius).

Kiek kubelių iš tunelio liko nepanaudota šiai piramidei?
A 34 **B** 29 **C** 22 **D** 18 **E** 15

M20. Žūklėje Petras pagavo tiek pat žuvų, kaip ir jo sūnus Lukas. Jonas pagavo triskart daugiau žuvų negu jo sūnus. Visi kartu jie pagavo 35 žuvis. Kiek žuvų pagavo Petras?
A 21 **B** 14 **C** 7 **D** 6 **E** 0

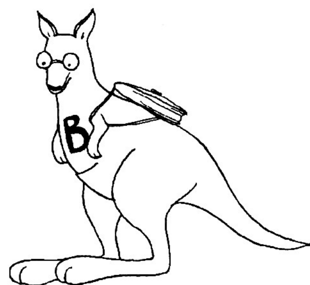
M21. Meno vadovas nori sudaryti trio iš smuikininko, pianisto ir violončelininko ir gali rinktis iš dviejų smuikininkų, dviejų pianistų ir dviejų violončelininkų. Jis nusprendė paklausyti kiekvienos galimos trio sudėties grojimo. Kelių perklausų jam prireiks?
A 3 **B** 4 **C** 8 **D** 24 **E** 25

M22. Iš kvadratinės auksinės plytelės iškertamas ruošinys medaliui. Iškirtus keturis ruošinius, iš atlikusio aukso pagaminama dar viena tokia plytelė. Kiek daugiausiai medalių galima iškalti turint iš pradžių 16 plytelių?
A 5 **B** 9 **C** 12 **D** 21 **E** 20

M23. Dvidešimt aštuoni mokiniai dalyvavo matematikos varžybose, ir jų rezultatai buvo skirtingi. Skaičius mokinių, atsidūrusių už Tomo, buvo dvigubai didesnis už skaičių mokinių, kuriems pasisekė geriau už Tomą. Kelintą vietą užėmė Tomas?
A 16 **B** 17 **C** 8 **D** 9 **E** 10

M24. Mūsų automobilio kilometrų skaitiklis dabar rodo 187 569, ir šio skaičiaus visi skaitmenys skirtingi. Po kiek kilometrų taip atsitiks sekantį kartą?
A 13 776 **B** 12 431 **C** 431 **D** 21 **E** 1

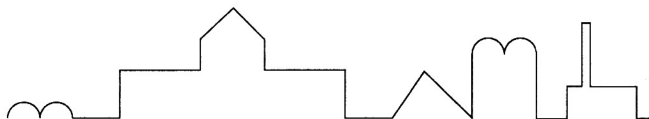
BIČIULIS (V ir VI klasės)



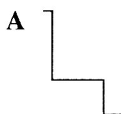
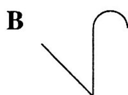
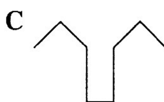
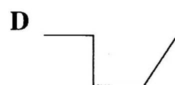
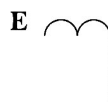
KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

B1. Skaičius 2002 turi tokią savybę, kad nepasikeičia ir skaitomas iš dešinės į kairę. Kuris iš žemiau parašytų skaičių tos savybės *neturi?*
A 1991 **B** 2323 **C** 2112 **D** 2222 **E** 4334

B2. Paveikslėlyje matome pilies kontūrą.



Kuri iš pavaizduotų linijų *nėra* to kontūro dalis?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

B3. Petraičiai turi tris dukreles. Kiekviena iš jų turi du brolius. Kiek vaikų turi Petraičiai?
A 9 **B** 7 **C** 6 **D** 5 **E** 11

B4. Žūklėje Petras pagavo tiek pat žuvų, kaip ir jo sūnus Lukas. Jonas pagavo triskart daugiau žuvų negu jo sūnus. Visi kartu jie pagavo 35 žuvis. Kiek žuvų pagavo Petras?
A 21 **B** 14 **C** 7 **D** 6 **E** 0

B5. Šįmet po savo gimtadienio rytojaus rytą aš pasižiūrėjau į kalendorių ir nustebau: „Poryt jau ketvirtadienis". Kurią savaitės dieną šįmet buvo mano gimtadienis?
A Pirmadienį **B** Antradienį **C** Trečiadienį **D** Ketvirtadienį **E** Penktadienį

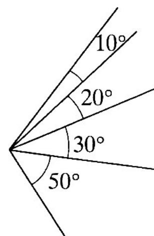
B6. Kuriame vėrinyje juodosios širdelės sudaro dvi trečiąsias visų to vėrinio širdelių?

A  **B**  **C** 

D  **E** 

B7. Kuris iš šių skaičių didžiausias?
A $10 \cdot 0{,}001 \cdot 100$ **B** $0{,}01 : 100$ **C** $100 : 0{,}01$
D $10000 \cdot 100 \cdot 10$ **E** $0{,}1 \cdot 0{,}01 \cdot 10000$

B8. Kiek skirtingo didumo kampų (mažesnių už ištiestinį) galima įžiūrėti paveikslėlyje?
A 4 **B** 6 **C** 8 **D** 10 **E** 11

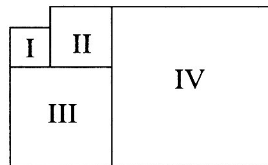


B9. Stačiakampio plotas lygus 1 m^2. Kam lygus plotas trikampio, kurį nuo stačiakampio atkerta tiesė, jungianti dviejų gretimų kraštinių vidurio taškus?
A 33 dm^2 **B** 25 dm^2 **C** 40 dm^2 **D** 3750 cm^2 **E** 1250 cm^2

B10. Iš didžiausio triženklio skaičiaus su skirtingais skaitmenimis atimkime mažiausią triženklį skaičių su skirtingais skaitmenimis. Gausime
A 864 **B** 885 **C** 800 **D** 100 **E** 899

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

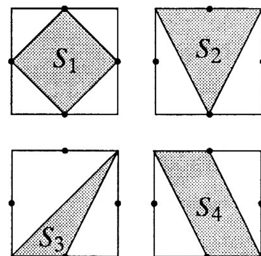
B11. Figūros I, II, III ir IV — kvadratai. I kvadrato perimetras yra 16 m, II kvadrato — 24 m. IV kvadrato perimetras lygus
A 56 m **B** 60 m **C** 64 m **D** 72 m **E** 80 m



B12. Iš kvadratinės auksinės plytelės iškertamas ruošinys medaliui. Iškirtus keturis ruošinius, iš atlikusio aukso pagaminama dar viena tokia plytelė. Kiek daugiausiai medalių galima iškalti turint iš pradžių 16 plytelių?
A 5 **B** 9 **C** 12 **D** 21 **E** 20

B13. Salės plotis 4 m, ilgis 5 m ir aukštis 3 m. Keliais metrais turėtų būti salė aukštesnė, kad jos tūris padidėtų 60 m^3?
A 3 m **B** 4 m **C** 5 m **D** 12 m **E** 20 m

B14. Duoti keturi lygūs kvadratai. Kiekviename iš jų pažymėti kraštinių vidurio taškai ir užtušuoti plotai, atitinkamai lygūs S_1, S_2, S_3 ir S_4. Kuris iš teiginių teisingas?
A $S_3 < S_4 < S_1 = S_2$
B $S_3 < S_1 = S_2 = S_4$
C $S_3 < S_1 = S_4 < S_2$
D $S_3 < S_4 < S_1 < S_2$
E $S_4 < S_3 < S_1 < S_2$



B15. Julius, Matas, Vytas ir Tadas turi katę, šunį, žuvytę ir kanarėlę — kiekvienas po vieną gyvūną. Matas turi gyvūną su kailiu, Tadas turi keturkojį gyvūną, Vytas turi paukštį, o Julius ir Matas nemėgsta kačių. Kuris sakinys *neteisingas*?
A Tadas turi šunį **B** Vytas turi kanarėlę **C** Julius turi žuvytę
D Tadas turi katę **E** Matas turi šunį

B16. Adomas įbėrė 50 g druskos į 200 g vandens. Kiek procentų druskos bus gautame tirpale?
A 250% **B** 50% **C** 25% **D** 20% **E** 5%

B17. Kiekviena iš raidžių P, Q, R ir S reiškia virš jos pavaizduotų daiktų bendrą masę (vienodos formos daiktai sveria vienodai).


P


Q


R


S

Jeigu $P < Q < R$, tai
A $P < S < Q$ **B** $Q < S < R$ **C** $S < P$ **D** $R < S$ **E** $R = S$

B18. Kompiuterinis virusas naikina disko erdvę. Pirmą dieną jis sunaikino $\frac{1}{2}$ erdvės. Antrą dieną jis sunaikino $\frac{1}{3}$ nesunaikintos erdvės, trečią dieną — $\frac{1}{4}$ likusios erdvės, o ketvirtą — $\frac{1}{5}$ tos erdvės, kuri dar buvo likusi. Kuri disko erdvės dalis liko nesugadinta po tų keturių dienų?
A $\frac{1}{5}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{10}$ **D** $\frac{1}{12}$ **E** $\frac{1}{24}$

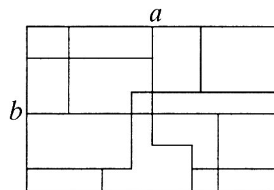
B19. Apskaičiuojama triženklio skaičiaus skaitmenų suma. Kokia gali būti didžiausia gautos sumos skaitmenų suma?
A 9 **B** 10 **C** 11 **D** 12 **E** 18

B20. Penki berniukai pasisvėrė po du, kiekvienas su kiekvienu. Svėrimų rezultatai buvo: 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg ir 101 kg. Visi penki berniukai kartu sveria
A 225 kg **B** 230 kg **C** 239 kg **D** 240 kg **E** 250 kg

KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

B21. Tu skaičiuoji balsu nuo 1 iki 100 ir suploji, kai pasakai arba skaičiaus 3 kartotinį, arba skaičių, kuris nėra skaičiaus 3 kartotinis, bet baigiasi skaitmeniu 3. Kiek kartų tu suplosi?
A 30 **B** 33 **C** 36 **D** 39 **E** 43

B22. Stačiakampio kraštinių ilgiai yra a ir b. Raskite visų jo viduje nubrėžtų atkarpų ilgių sumą (kiekviena atkarpa lygiagreti vienai iš stačiakampio kraštinių).
A $3(a+b)$ **B** $3a+b$
C $3a+2b$ **D** $2a+3b$
E Rasti neįmanoma

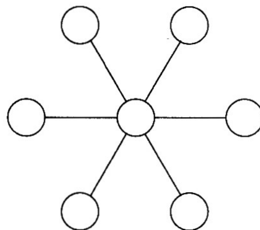


B23. Dviratininkas važiavo į kalną 12 km/h greičiu, o nuo kalno leidosi 20 km/h greičiu. Pakilti į kalną truko 16 minučių ilgiau nei nuvažiuoti į pakalnę. Kiek minučių truko jam nusileisti į pakalnę?
A 24 **B** 40 **C** 32 **D** 16 **E** 28

B24. Pusantro katino suėda pusantros pelės per pusantros valandos. Kiek pelių suėda 15 katinų per 15 valandų?
A 15 **B** 45 **C** 60 **D** 125 **E** 150

B25. Ada krepšyje turi 14 raudonų, 8 baltus ir 6 juodus rutuliukus. Kiek rutuliukų ji turi ištraukti užrištomis akimis, kad būtų įsitikinusi, jog tarp ištrauktų rutuliukų bus bent po vieną kiekvienos spalvos rutuliuką?
A 23 **B** 22 **C** 21 **D** 15 **E** 9

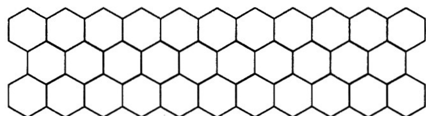
B26. Į 7 skrituliukus po vieną įrašomi skaičiai nuo 1 iki 7 taip, kad kiekvienų trijų vienoje tiesėje esančių skaičių suma būtų ta pati. Keli iš skaičių gali atsidurti centriniame skrituliuke?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4



B27. Kubelio sienos nudažytos skirtingomis spalvomis. Laikydamas kubelį rankoje aš „iš kampo“ kartu matau mėlyną, baltą ir geltoną sienas. Pasukęs kubelį, aš galiu kartu pamatyti juodą, mėlyną ir raudoną sienas. Dar kitaip pasukęs kubelį, aš galiu kartu pamatyti žalią, juodą ir baltą sienas. Kokia spalva nudažyta siena, priešinga baltajai?
A Raudona **B** Mėlyna **C** Juoda **D** Žalia **E** Geltona

B28. Mokytojas liepė mokiniams nusibraižyti apskritimą, kvadratą bei trikampį ir suskaičiuoti tų figūrų susikirtimo taškus. Kiek daugiausiai susikirtimo taškų mokinys galėjo gauti?
A 14 **B** 16 **C** 18 **D** 20 **E** 22

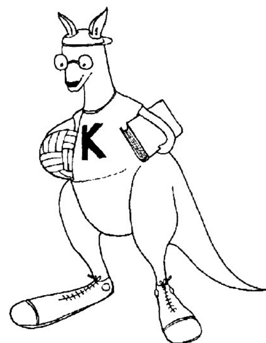
B29. Iš vienodų pagaliukų sudėtas 32 akučių tinklas, kurį sudaro trys eilės šešiakampių (žr. paveikslėlį).



Iš kelių pagaliukų susideda tas tinklas?
A 123 **B** 124 **C** 125 **D** 120 **E** 121

B30. Krepšinio turnyre dalyvauja 32 komandos. Turnyras vykdomas etapais. Kiekviename etape komandos suskirstomos į grupes po keturias kiekvienoje grupėje. Kiekvienoje tokioje grupėje kiekviena komanda su kiekviena kita žaidžia vienerias rungtynes. Po grupės susitikimų dvi geriausios komandos patenka į kitą etapą, kitos dvi iškrenta. Pasibaigus etapui, į kurį patenka jau tik keturios komandos, dvi geriausios tos grupės komandos žaidžia finalines rungtynes. Kiek rungtynių iš viso bus sužaista turnyre?
A 49 **B** 89 **C** 91 **D** 97 **E** 181

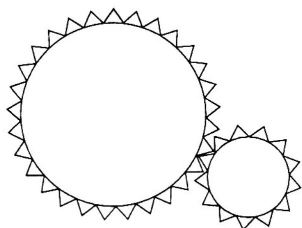
KADETAS (VII ir VIII klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

K1. Tu skaičiuoji balsu nuo 1 iki 100 ir suploji, kai pasakai arba skaičiaus 3 kartotinį, arba skaičių, kuris nėra skaičiaus 3 kartotinis, bet baigiasi skaitmeniu 3. Kiek kartų tu suplosi?
A 30 **B** 33 **C** 36 **D** 39 **E** 43

K2. Didesniojo dantračio spindulys triskart didesnis už mažesniojo dantračio spindulį. Jeigu didesnysis dantratis apsisuks vieną kartą prieš laikrodžio rodyklę, tai mažesnysis dantratis apsisuks
A 1 kartą pagal laikrodžio rodyklę
B 3 kartus pagal laikrodžio rodyklę
C 3 kartus prieš laikrodžio rodyklę
D 9 kartus pagal laikrodžio rodyklę
E 9 kartus prieš laikrodžio rodyklę

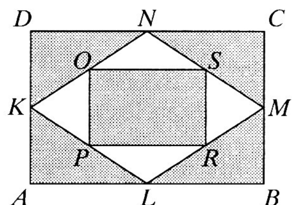


K3. Labdaros organizacijai reikėjo nupirkti 2002 sąsiuvinius. Parduotuvė pardavinėjo tuos sąsiuvinius pakeliais po 24. Kiek mažiausiai tokių pakelių reikia organizacijai pirkti, kad įsigytų reikiamą sąsiuvinių skaičių, ir kiek sąsiuvinių jai liks išdalijus 2002 sąsiuvinius?
A 83 pakelius, 10 sąsiuvinių **B** 84 pakelius, 10 sąsiuvinių **C** 83 pakelius, 14 sąsiuvinių **D** 84 pakelius, 16 sąsiuvinių **E** 84 pakelius, 14 sąsiuvinių

K4. Kuri iš duotųjų trupmenų yra didžiausia?
A $\frac{7}{8}$ **B** $\frac{66}{77}$ **C** $\frac{555}{666}$ **D** $\frac{4444}{5555}$ **E** $\frac{33333}{44444}$

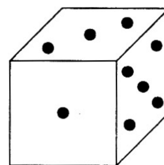
K5. Liepos pirmąją Niuberyje saulė patekės 4^{53} val., o nusileis 21^{25} val. To laiko tarpo viduryje saulė užims aukščiausią tą dieną padėtį. Kelintą valandą tai bus?
A 12^{00} **B** 12^{39} **C** 13^{09} **D** 16^{32} **E** 11^{08}

K6. Taškai K, L, M, N yra stačiakampio $ABCD$ kraštinių vidurio taškai, o taškai O, P, R, S yra rombo $KLMN$ kraštinių vidurio taškai. Kuri stačiakampio $ABCD$ ploto dalis užtušuota?
A $\frac{3}{5}$ **B** $\frac{2}{3}$ **C** $\frac{5}{6}$ **D** $\frac{3}{4}$ **E** $\frac{5}{7}$



K7. Trys vaikai suvalgė 17 pyragaičių. Andrius suvalgė pyragaičių daugiau už kiekvieną kitą vaiką. Kiek mažiausiai pyragaičių galėjo suvalgyti Andrius?
A Visus **B** 9 **C** 6 **D** 8 **E** 7

K8. Paveikslėlyje pavaizduoto lošimo kauliuko apatinėje sienelėje pažymėtos 6 akutės, kairėje sienelėje — 4 akutės, užpakalinėje — 2 akutės. Vienu metu įmanoma pamatyti daugiausiai tris sieneles, turinčias bendrą viršūnę. Kiek daugiausiai akučių įmanoma vienu metu pamatyti sukiojant kauliuką?



A 15 **B** 14 **C** 13 **D** 12 **E** Kitas atsakymas

K9. Žūklėje Petras pagavo tiek pat žuvų, kaip ir jo sūnus Lukas. Jonas pagavo triskart daugiau žuvų negu jo sūnus. Visi kartu jie pagavo 35 žuvis. Kiek žuvų pagavo Petras?
A 21 **B** 14 **C** 7 **D** 6 **E** 0

K10. Krepšelis obuolių kainuoja 2 eurus, krepšelis kriaušių — 3 eurus, o krepšelis slyvų — 4 eurus. Jeigu 8 krepšeliai tų vaisių kainuoja 23 eurus, tai kiek daugiausiai iš jų gali būti krepšelių su slyvomis?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

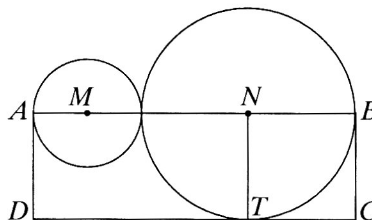
KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

K11. Jei $a : b = 9 : 4$ ir $b : c = 5 : 3$, tai santykis $(a - b) : (b - c)$ lygus
A $7 : 12$ **B** $25 : 8$ **C** $4 : 1$ **D** $5 : 2$ **E** Nustatyti negalima

K12. Reiso metu žvejybinė bazė priėmė 30 žmonių iš skęstančio tralerio. Todėl maisto atsargų bazėje, kurių būtų užtekę 60 dienų, dabar užteko tik 50 dienų. Kiek žmonių buvo bazėje prieš priimant skendusiuosius?
A 15 **B** 40 **C** 110 **D** 140 **E** 150

K13. Mokyklos šventės dalyvių skaičiaus 25% sudarė berniukai, o 75% — mergaitės. Pusės šventėje dalyvavusių berniukų ir 20% mergaičių — iš viso 99 šventėje dalyvavusių mokinių — akys buvo mėlynos. Kiek mokinių dalyvavo šventėje?
A 360 **B** 340 **C** 240 **D** 200 **E** Nustatyti negalima

K14. Paveikslėlyje taškai M ir N atitinkamai yra iš išorės besiliečiančių apskritimų centrai. Tiesė MN kerta tuos apskritimus taškuose A ir B (neskaitant apskritimų lietimosi taško). Stačiakampio $ABCD$ kraštinė CD taške T liečia tą apskritimą, kurio centras yra taškas N. Stačiakampio $ABCD$ plotas lygus 15. Koks yra trikampio MNT plotas?



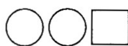
A 4 **B** $\frac{15}{4}$ **C** $\frac{\pi}{2}$ **D** 5 **E** $2\sqrt{5}$

K15. Penki berniukai pasisvėrė po du, kiekvienas su kiekvienu. Svėrimų rezultatai buvo: 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg ir 101 kg. Visi penki berniukai kartu sveria
A 225 kg **B** 230 kg **C** 239 kg **D** 240 kg **E** 250 kg

K16. Keturios dukterys — Agnė, Birutė, Celestina ir Danutė — nupirko savo tėtei gimimo dienos proga dovaną. Viena iš mergaičių paslėpė dovaną. Mama paklausė, kuri iš jų tai padarė. Mergaitės atsakė: Agnė — „Aš to nepadariau", Birutė — „Aš to nepadariau", Celestina — „Tai padarė Danutė", Danutė — „Tai padarė Birutė". Paaiškėjo, kad viena mergaičių sumelavo. Kuri iš mergaičių paslėpė dovaną?
A Agnė **B** Birutė **C** Celestina **D** Danutė **E** Nustatyti neįmanoma

K17. Kiekviena iš raidžių P, Q, R ir S reiškia virš jos pavaizduotų daiktų bendrą masę (vienodos formos daiktai sveria vienodai).


P


Q


R


S

Jeigu $P < Q < R$, tai
A $P < S < Q$ **B** $Q < S < R$ **C** $S < P$ **D** $R < S$ **E** $R = S$

K18. Kanadoje dalis gyventojų kalba angliškai, dalis — prancūziškai, o likusieji kalba tiek angliškai, tiek prancūziškai. 85% gyventojų kalba angliškai, 75% — prancūziškai. Kiek procentų gyventojų kalba abiem kalbomis?
A 50% **B** 57% **C** 25% **D** 60% **E** 40%

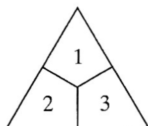
K19. Šachmatinės lentos 2×9 kai kuriuose laukeliuose padėta po vieną monetą. Kiekviename laukelyje arba yra moneta, arba laukelis turi bendrą kraštinę su laukeliu, kuriame yra moneta. Kiek mažiausiai monetų gali būti padėta lentoje?
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

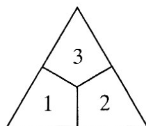
K20. Matas užlipa į viršų stovinčiu eskalatoriumi per 90 sekundžių. Jeigu jis stovi ant eskalatoriaus nejudėdamas, tai užvažiuoja į viršų per 60 sekundžių. Per kiek sekundžių jis pakils į viršų, jei ir eskalatorius judės į viršų, ir jis pats lips į viršų?
A 36 **B** 75 **C** 45 **D** 30 **E** 50

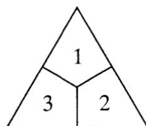
KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

K21. Teigiamasis sveikasis skaičius n dalijasi ir iš 21, ir iš 9. Iš mažiausiai kelių teigiamųjų sveikųjų skaičių dalijasi skaičius n?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

K22. Viename žaidime žaidžiama su lygiakraščio trikampio formos žetonais. Kiekvienas žetonas padalytas į tris vienodus keturkampius, kaip parodyta paveikslėlyje.



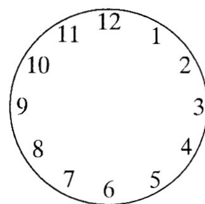




Kiekvienas keturkampis nudažytas viena iš penkių spalvų, bet spalvos viename žetone kartotis negali. Kiek gali būti skirtingų žetonų? (Du žetonai nesiskiria, jeigu juos galima sutapdinti pasukus vieną iš jų apie centrą; taigi paveikslėlio pirmas ir antras žetonai nesiskiria, o trečias — nuo jų skiriasi.)
A $\frac{5^3}{3}$ **B** 125 **C** 60 **D** 30 **E** 20

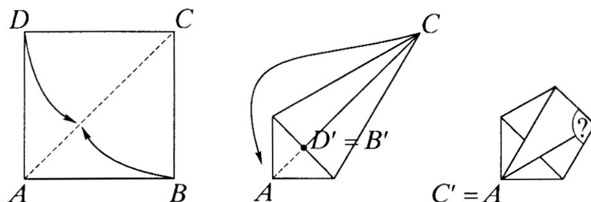
K23. Vieną mėnesį trys sekmadieniai buvo lyginės mėnesio dienos. Kokia savaitės diena buvo 20-toji mėnesio diena?
A Pirmadienis **B** Antradienis **C** Trečiadienis **D** Ketvirtadienis **E** Šeštadienis

K24. Laikrodžio ciferblatas suskilo į tris dalis, bet nė viena skilimo linija neperskėlė valandas reiškiančių skaičių į atskirus skaitmenis. Visų trijų dalių skaičių sumos buvo vienodos. Tada galima teigti, kad
A 12 ir 3 nėra toje pačioje dalyje
B 8 ir 4 yra toje pačioje dalyje
C 7 ir 5 yra toje pačioje dalyje
D 11, 1 ir 5 yra toje pačioje dalyje
E 2, 11 ir 9 yra toje pačioje dalyje



K25. Mokytojas liepė mokiniams nusibraižyti du apskritimus bei tris tieses ir savo brėžinyje suskaičiuoti tų linijų susikirtimo taškus. Kiek daugiausiai susikirtimo taškų mokinys galėjo gauti?
A 18 **B** 17 **C** 16 **D** 15 **E** 14

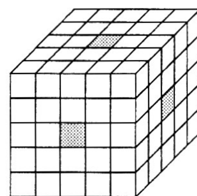
K26. Kvadratinis popieriaus lapas sulankstytas į keliasluoksnį plokščią penkiakampį taip (žr. paveikslėlį): iš pradžių viršūnės D ir B užlenkiamos taip, kad pereitų į vieną tašką $D' = B'$, esantį įstrižainėje AC; tada gautą keturkampį lenkiame taip, kad taškas C pereitų į tašką $C' = A$. Koks yra klaustuku pažymėto kampo didumas?



A 104° **B** 106,5° **C** 108° **D** 112,5° **E** 114,5°

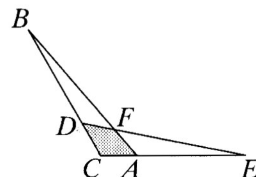
K27. Matematikos mokytojas lentoje parašė 1 ir paprašė Tomo parašyti kitą natūralųjį skaičių. Tada mokiniai paeiliui prieidavo prie lentos ir kiekvienas parašydavo visų lentoje surašytų skaičių sumą. Tam tikru momentu Petras parašė 1000. Kurio iš nurodytų skaičių Tomas tikrai negalėjo būti parašęs?
A 999 **B** 499 **C** 299 **D** 249 **E** 124

K28. Kubas, kurio kraštinės ilgis yra 5, padalytas į vienetinius kubelius. Iš kubo pašalintos 3 kubelių eilės (žr. paveikslėlį). Gautas kūnas panardintas į dažus. Kelių kubelių nusidažė lygiai viena siena?
A 30 **B** 26 **C** 40 **D** 48 **E** 24



K29. Iš skaičių 1, 2, 3 ir 4 be pasikartojimų buvo sudaryti visi keturženkliai skaičiai. Visų tų skaičių suma lygi
A 55 550 **B** 99 990 **C** 66 660 **D** 100 000 **E** 98 760

K30. Paveikslėlyje trikampiai ABC ir DEC lygūs, $DC = AC = 1$, $CB = CE = 4$. Trikampio ABC plotas lygus S. Kam lygus keturkampio $AFDC$ plotas?
A $\frac{S}{2}$ **B** $\frac{S}{4}$ **C** $\frac{S}{5}$ **D** $\frac{2S}{5}$ **E** $\frac{2S}{3}$



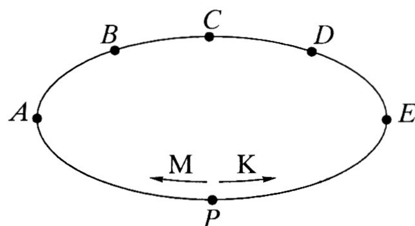
JUNIORAS (IX ir X klasės)



KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

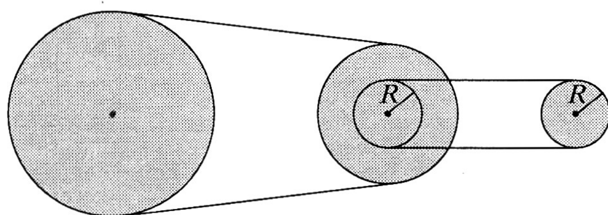
J1. Šeši vaikai kartu suvalgė 20 pyragaičių. Danutė suvalgė pyragaičių daugiau už kiekvieną kitą vaiką, Andrius suvalgė vieną pyragaitį, Birutė — du, Karolis — tris. Kiek mažiausiai pyragaičių galėjo suvalgyti Danutė?
A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

J2. Matas bėga triskart greičiau už savo jaunesniąją sesutę Kotryną. Jie abu pradėjo bėgti iš to paties taško P tuo pačiu metu ir bėga priešingomis kryptimis paveikslėlyje pavaizduota trasa. Kuriame trasos taške jie susitiks?
A A **B** B **C** C **D** D **E** E



J3. Šįmet po savo gimtadienio rytojaus rytą aš pasižiūrėjau į kalendorių ir nustebau: „Poryt jau ketvirtadienis". Kurią savaitės dieną šįmet buvo mano gimtadienis?
A Pirmadienį **B** Antradienį **C** Trečiadienį **D** Ketvirtadienį **E** Penktadienį

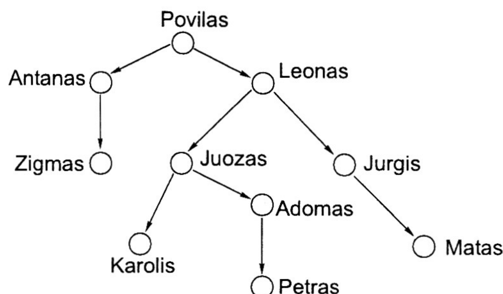
J4. Kol pavaros (žr. paveikslėlį) didysis ratas apsisuka 100 kartų, mažasis ratas apsisuka 200 kartų.



Kiek kartų per tą laiką apsisuka vidurinis ratas?
A 100 **B** 200 **C** 150 **D** 175 **E** Nustatyti neįmanoma

J5. Iš didžiausio triženklio skaičiaus su skirtingais skaitmenimis atimkime mažiausią triženklį skaičių su skirtingais skaitmenimis. Gausime
A 864 **B** 885 **C** 800 **D** 100 **E** 899

J6. Petras sudarė genealoginį medį, į kurį įtraukė tik vyrus — savo protėvius ir jų palikuonius. Rodyklės nukreiptos nuo tėvo į sūnų. Koks yra Petro tėvo brolio senelio brolio sūnaus vardas?
A Juozas **B** Matas
C Leonas **D** Zigmas
E Kitas atsakymas



J7. Viena briaunainio siena yra penkiakampis. Kiek mažiausiai sienų gali turėti briaunainis?
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 10

J8. Tegu M yra pirmųjų 2002 pirminių skaičių sandauga. Keliais nuliais baigiasi skaičiaus M dešimtainis užrašas?
A 0 **B** 1 **C** 10 **D** 20 **E** 100

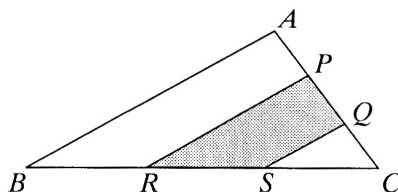
J9. Kompiuterinis virusas naikina disko erdvę. Pirmą dieną jis sunaikino $\frac{1}{2}$ erdvės. Antrą dieną jis sunaikino $\frac{1}{3}$ nesugadintos erdvės, trečią dieną — $\frac{1}{4}$ likusios erdvės, o ketvirtą — $\frac{1}{5}$ tos erdvės, kuri dar buvo likusi. Kuri disko erdvės dalis liko nesugadinta po tų keturių dienų?
A $\frac{1}{5}$ **B** $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{10}$ **D** $\frac{1}{12}$ **E** $\frac{1}{24}$

J10. Mokytojas liepė mokiniams nusibraižyti 6 skirtingus apskritimus ir savo brėžinyje suskaičiuoti tų apskritimų susikirtimo taškus. Kiek daugiausiai susikirtimo taškų mokinys galėjo gauti?
A 24 **B** 15 **C** 28 **D** 36 **E** 30

KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

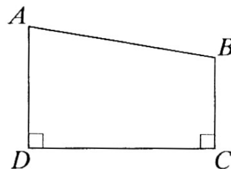
J11. Žūklėje Petras pagavo tiek pat žuvų, kaip ir jo sūnus Lukas. Jonas pagavo triskart daugiau žuvų negu jo sūnus. Visi kartu jie pagavo 35 žuvis. Kiek žuvų pagavo Petras?
A 21 **B** 14 **C** 7 **D** 6 **E** 0

J12. Trikampio ABC plotas lygus 1. Taškai P, Q, R ir S trikampio ABC kraštinėse yra tokie, kad $AP = PQ = QC$ ir $BR = RS = SC$. Koks yra užtušuotos srities plotas?
A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{2}{3}$ **E** $\frac{3}{4}$



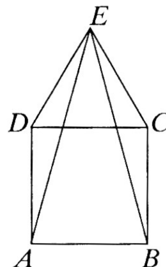
J13. Su kuriuo natūraliuoju n skaičiai $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$ ir 2 500 000 skiriasi mažiausiai?
A 11 **B** 12 **C** 20 **D** 21 **E** 22

J14. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinių ilgiai yra natūralieji skaičiai, o perimetras lygus 16. Kampai C ir D — statieji, kampas B — bukas. Kraštinės BC ilgis lygus
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5



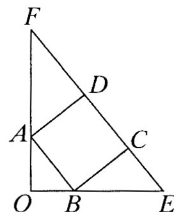
J15. Matas užlipa į viršų stovinčiu eskalatoriumi per 90 sekundžių. Jeigu jis stovi ant eskalatoriaus nejudėdamas, tai užvažiuoja į viršų per 60 sekundžių. Per kiek sekundžių jis pakils į viršų, jei ir eskalatorius judės į viršų, ir jis pats lips į viršų?
A 36 **B** 75 **C** 45 **D** 30 **E** 50

J16. Ant kvadrato $ABCD$ kraštinės CD į išorę nubrėžtas lygiakraštis trikampis CDE. Kampo AEB didumas lygus
A 15° **B** 30° **C** 45° **D** 60° **E** 90°



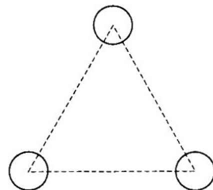
J17. Kai iš berniukų ir mergaičių grupės pasitraukė 15 mergaičių, tai berniukų grupėje pasidarė dukart daugiau negu mergaičių. Po to iš grupės pasitraukė 45 berniukai, ir tada mergaičių pasidarė penkis kartus daugiau negu berniukų. Kiek mergaičių buvo grupėje iš pradžių?
A 20 **B** 25 **C** 35 **D** 40 **E** 75

J18. Paveikslėlyje į statųjį trikampį OEF įbrėžtas kvadratas $ABCD$. Koks yra įžambinės EF ilgis, jeigu $OA = 48$ ir $OB = 36$?
A 176 **B** 180 **C** 185 **D** 188 **E** 190



J19. Automatas viena operacija skaičių x gali paversti vienu iš skaičių $x + 3$, $x - 2$, $\frac{1}{x}$, x^2. Į automatą įvedamas skaičius 1,99 ir paeiliui atliekamos trys operacijos — iš pradžių su tuo skaičiumi, po to su dviem gautais rezultatais. Pažymėkime raide y didžiausią skaičių, kurį automatas gali gauti po trijų operacijų. Tada
A $y = 1{,}99^8$ **B** $y = 4{,}99^4$ **C** $y = 7{,}99^2$ **D** $5\,000 < y < 15\,000$ **E** $y > 20\,000$

J20. Keli yra apskritimai, vienu metu liečiantys visus tris paveikslėlyje pavaizduotus apskritimus?
A 2 **B** 5 **C** 6 **D** 7 **E** 8

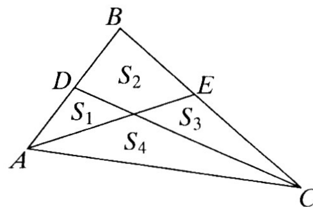


KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

J21. Stačiakampio kraštinės yra sveikieji skaičiai, o jo perimetras lygus 32. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių gali būti tokio stačiakampio plotas?
A 24 **B** 48 **C** 76 **D** 192 **E** 384

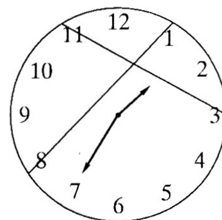
J22. Reikia pervežti 50 konteinerių, kurie sveria atitinkamai 150 kg, 151 kg, 152 kg, ..., 198 kg ir 199 kg. Kiek reikia sunkvežimių, kurie gali vežti ne daugiau kaip po 1200 kg, norint visus konteinerius pervežti iš karto?
A 9 **B** 10 **C** 8 **D** 7 **E** 6

J23. Trikampis ABC padalytas į keturias dalis, kurių plotai lygūs S_1, S_2, S_3 ir S_4 (žr. paveikslėlį). Ar gali visi keturi plotai būti lygūs?
A Ne
B Taip, bet tik jei trikampis lygiakraštis
C Taip, bet tik jei trikampis statusis
D Taip, bet tik jei trikampis bukasis
E Taip, bet tik jei trikampio kampai lygūs 36°, 72°, 72°



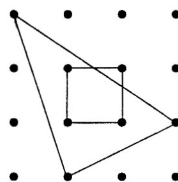
J24. Viešbutyje tris vasaros mėnesius būna užimta vidutiniškai 88% kambarių, o likusius devynis mėnesius užimta vidutiniškai 44% kambarių. Kiek procentų kambarių vidutiniškai užimta per visus metus?
A 132% **B** 66% **C** 55% **D** 44% **E** Kitas atsakymas

J25. Žemės drebėjimo metu suskilo bokšto laikrodžio ciferblatas. Vienas plyšys eina nuo skaičiaus 11 iki skaičiaus 3, kitas jungia skaičius 1 ir 8. Abu plyšiai eina išilgai tiesių. Kokį kampą sudaro tos tiesės?
A 70° **B** 75° **C** 80° **D** 85° **E** 90°



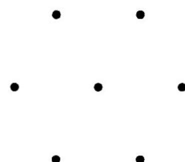
J26. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunos lygios $AB = 9$, $BC = 12$, $CA = 8$, $AD = 6$, $BD = 12$ ir $CD = 4$. Kiek porų panašiųjų trikampių galima sudaryti iš piramidės sienų?
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

J27. Atstumas tarp gretimų taškų paveikslėlyje lygus 1 tiek horizontaliai, tiek vertikaliai. Bendros trikampio ir kvadrato dalies plotas lygus
A $\frac{9}{10}$ **B** $\frac{15}{16}$ **C** $\frac{8}{9}$ **D** $\frac{11}{12}$ **E** $\frac{14}{15}$



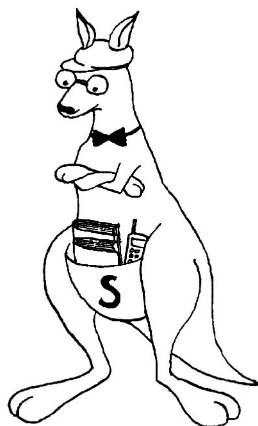
J28. Duotas keturženklis skaičius. Trijų dėmenų — pirmųjų dviejų skaitmenų sudaromo skaičiaus, paskutinio skaitmens ir priešpaskutinio skaitmens — suma lygi paskutinių dviejų skaitmenų sudaromam skaičiui. Kiek yra tokių keturženklių skaičių? (Sąlygą tenkina, pavyzdžiui, skaičius 6370, nes $63 + 7 + 0 = 70$.)
A 10 **B** 45 **C** 50 **D** 80 **E** 90

J29. Paveikslėlyje pažymėti taškai yra taisyklingojo šešiakampio viršūnės ir centras. Kiek yra lygiašonių trikampių, kurių viršūnės yra pažymėti taškai?
A 6 **B** 18 **C** 20 **D** 30 **E** 36



J30. Kam lygus reiškinys $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + 10 \cdot 2^{10}$?
A $9 \cdot 2^{11}$ **B** $10 \cdot 2^{11}$ **C** $11 \cdot 2^{10}$ **D** $11 \cdot 2^{11}$ **E** $10 \cdot 2^{12}$

SENJORAS (XI ir XII klasės)



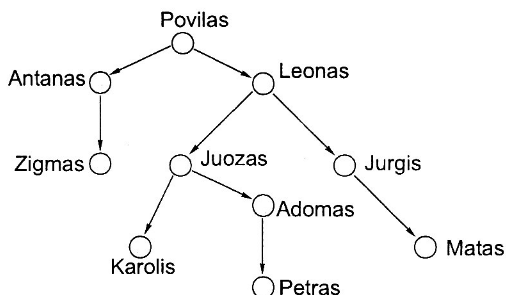
KLAUSIMAI PO 3 TAŠKUS

S1. Su kuriuo natūraliuoju n skaičiai

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n \quad \text{ir} \quad 2\,500\,000$$

skiriasi mažiausiai?
A 11 **B** 12 **C** 20 **D** 21 **E** 22

S2. Petras sudarė genealoginį medį, į kurį įtraukė tik vyrus — savo protėvius ir jų palikuonis. Rodyklės nukreiptos nuo tėvo į sūnų. Koks yra Petro tėvo brolio senelio brolio sūnaus vardas?
A Juozas **B** Matas
C Leonas **D** Zigmas
E Kitas atsakymas



S3. Viena briaunainio siena yra penkiakampis. Kiek mažiausiai sienų gali turėti briaunainis?
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 10

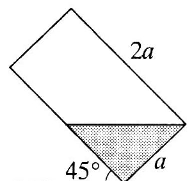
S4. Viešbutyje tris vasaros mėnesius būna užimta vidutiniškai 88% kambarių, o likusius devynis mėnesius užimta vidutiniškai 44% kambarių. Kiek procentų kambarių vidutiniškai užimta per visus metus?
A 132% **B** 66% **C** 55% **D** 44% **E** Kitas atsakymas

S5. Tegu a ir b — natūralieji skaičiai. Jeigu skaičių a ir b didžiausiasis bendrasis daliklis lygus 3, o $a : b = 0{,}4$, tai sandauga ab lygi
A 18 **B** 10 **C** 36 **D** 30 **E** 90

S6. Prizmė turi 2002 viršūnes. Kiek ji turi briaunų?
A 3003 **B** 1001 **C** 2002 **D** 4002 **E** 2001

S7. Cilindrinės stiklinės matmenys nurodyti paveikslėlyje. Į ją įpilta vandens, ir ji paversta 45° kampu. Kokią stiklinės tūrio dalį užima vanduo?

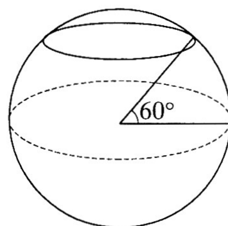
A $< 25\%$ **B** 25% **C** 33% **D** $33\frac{1}{3}\%$ **E** $> 33\frac{1}{3}\%$



S8. Žemiau parašytose nelygybėse kampų didumai išreikšti radianais. Kuri iš parašytų nelygybių teisinga?
A $\sin 1 < \sin 2 < \sin 3$ **B** $\sin 3 < \sin 2 < \sin 1$ **C** $\sin 1 < \sin 3 < \sin 2$
D $\sin 2 < \sin 1 < \sin 3$ **E** $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

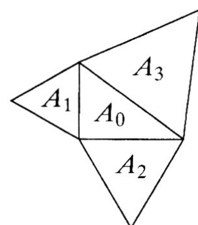
S9. Virstant vandeniui ledu tūris padidėja $\frac{1}{11}$. Kuria dalimi sumažėja ištirpinto ledo tūris?
A $\frac{1}{11}$ **B** $\frac{1}{10}$ **C** $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{13}$ **E** $\frac{1}{14}$

S10. Žemės pusiaujo ilgis apytikriai lygus 40 000 km. Kam apytikriai lygus 60° šiaurės platumos lygiagretės ilgis?
A 34 000 km **B** 23 500 km **C** 26 700 km
D 30 000 km **E** Kitas atsakymas



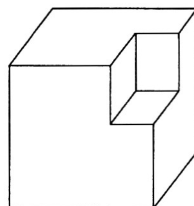
KLAUSIMAI PO 4 TAŠKUS

S11. Paveikslėlyje pavaizduotų trikampių plotai yra A_0, A_1, A_2, A_3. Ploto A_0 trikampis statusis, kiti trys trikampiai — lygiakraščiai. Kuri iš lygybių teisinga?
A $A_1 + A_2 = A_3$ **B** $A_1^2 + A_2^2 = A_3^2$
C $A_1 + A_2 + A_3^2 = 3A_0$ **D** $A_1 + A_2 = A_3\sqrt{2}$
E Jokia



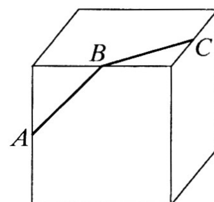
S12. Vienos šaunios kalbos abėcėlė turi tik 6 raides A, B, E, L, R, S, ir būtent tokia jų tvarka. Kiekvieną kalbos žodį sudaro šitų šešių raidžių seka, kurioje raidė imama lygiai vieną kartą. Be to, kiekviena šitų raidžių seka yra tos kalbos žodis. Visi žodžiai surašyti į žodyną abėcėline tvarka. Koks žodis stovi 537-toje žodyno vietoje?
A REBLAS **B** SBERLA **C** LERBAS **D** RABLES **E** ARBELS

S13. Šiuolaikinė skulptūra buvo padaryta išpjovus stačiakampį gretasienį iš kubo formos akmens. Kubo tūris buvo 512 dm^3. Koks yra pavaizduotos skulptūros paviršiaus plotas?
A 320 dm^2 **B** 336 dm^2 **C** 384 dm^2 **D** 468 dm^2
E Apskaičiuoti be papildomų duomenų neįmanoma



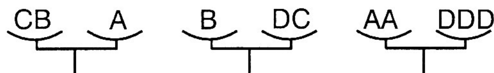
S14. Žūklėje Petras pagavo tiek pat žuvų, kaip ir jo sūnus Lukas. Jonas pagavo triskart daugiau žuvų negu jo sūnus. Visi kartu jie pagavo 35 žuvis. Kiek žuvų pagavo Petras?
A 21 **B** 14 **C** 7 **D** 6 **E** 0

S15. Koks yra didumas kampo tarp atkarpų AB ir BC (žr. paveikslėlį), kur A, B ir C yra kubo briaunų vidurio taškai?
A 90° **B** 100° **C** 110° **D** 120° **E** 135°



S16. Futbolo turnyre dalyvavo dešimt komandų. Kiekviename susitikime laimėjusi komanda gavo 3 taškus, pralaimėjusi — 0 taškų, o už lygiąsias abi komandos gavo po 1 tašką. Kiekviena komanda su kiekviena kita sužaidė po vieną susitikimą. Visos komandos kartu surinko 130 taškų. Kiek susitikimų baigėsi lygiosiomis?
A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

S17. Pavaizduotos trejos svarstyklės yra pusiausviros. Keli svarsčiai C atsvertų svarstį B?

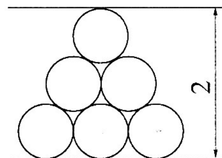


A 2 **B** 3 **C** 5 **D** 6 **E** 7

S18. Vienoje bendrovėje įdiegus naujas technologijas produkcijos savikaina sumažėjo 50%. Po to buvo sumažintas darbuotojų skaičius, ir produkcijos savikaina sumažėjo 40%. Pagaliau buvo įvesta tobulesnė valdymo sistema, ir tai sumažino produkcijos savikainą 10%. Kiek procentų sumažėjo produkcijos savikaina po visų trijų pertvarkymų?
A 100% **B** 73% **C** 92% **D** 87% **E** 67%

S19. Achilas vejasi vėžlį. Iš pradžių atstumas tarp jų buvo 990 m. Achilas kiekvieną sekundę įveikia 10 metrų, o vėžlys 1 metrą nuropoja per 10 sekundžių. Per kiek sekundžių Achilas pavys vėžlį?
A 100 **B** 990 **C** 99 **D** 110 **E** Niekada

S20. Paveikslėlyje visi apskritimai turi tą patį spindulį. Kokį?
A $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ **B** $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ **C** $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ **D** $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$
E Kitokį



KLAUSIMAI PO 5 TAŠKUS

S21. Matematikos mokytojas lentoje parašė 1 ir paprašė Tomo parašyti kitą natūralųjį skaičių. Tada mokiniai paeiliui prieidavo prie lentos ir kiekvienas parašydavo visų lentoje surašytų skaičių sumą. Tam tikru momentu Petras parašė 1000. Kurio iš nurodytų skaičių Tomas tikrai negalėjo būti parašęs?
A 999 **B** 499 **C** 299 **D** 249 **E** 124

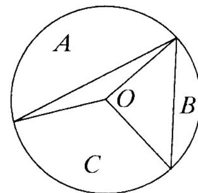
S22. Plokštumoje yra 10 taškų. Penki iš jų yra vienoje tiesėje, ir jokioje kitoje tiesėje nėra daugiau kaip dviejų duotųjų taškų. Kiek yra trikampių su viršūnėmis tuose taškuose?
A 20 **B** 50 **C** 70 **D** 100 **E** 110

S23. Aišku, kad skaičius $2002! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2001 \cdot 2002$ dalijasi iš 2001. Didžiausias toks natūralusis k, jog 2002! dalijasi iš 2001^k, yra
A 101 **B** 71 **C** 64 **D** 2 **E** 1

S24. Dviejų natūraliųjų skaičių suma didesnė už 27. Pirmas skaičius daugiau nei dvigubai didesnis už antrą skaičių, sumažintą 12 vienetų. Antras skaičius daugiau nei devyniskart didesnis už pirmąjį skaičių, sumažintą 10 vienetų. Kokie tai skaičiai?
A 12 ir 18 **B** 11 ir 17 **C** 10 ir 20 **D** 13 ir 15 **E** Nustatyti neįmanoma

S25. Kiek yra nelygių trikampių, kurių viršūnės yra taisyklingojo dešimtkampio viršūnėse?
A 6 **B** 7 **C** 8 **D** 9 **E** Kitas skaičius

S26. Pavaizduoto apskritimo spindulys yra 1, o centras — taškas O. Srities A plotas yra $\frac{5\pi}{12}-\frac{1}{4}$, srities B plotas $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. Srities C plotas lygus
A $\frac{\pi}{4}$ **B** $\frac{\pi}{3}$ **C** $\frac{2\pi}{3}$ **D** $\frac{\pi}{6}$ **E** $\frac{5\pi}{12}$

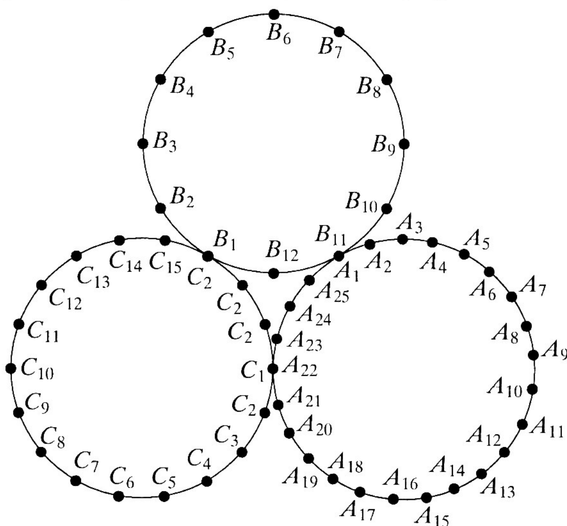


S27. Kiek iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 10^{2002} turi skaitmenų sumą, lygią 2?
A 2 007 006 **B** 2 005 003 **C** 2 003 001 **D** 2 005 002 **E** Kitas skaičius

S28. Butelyje yra 21 litras 18% skruzdžių rūgšties tirpalo. Kiek litrų skysčio reikia pakeisti tokiu pat kiekiu 90% skruzdžių rūgšties tirpalo, kad gautume 42% koncentracijos tirpalą?
A 3 **B** 5 **C** 7 **D** 9 **E** 11

S29. Duota, kad $a+b+c=7$, $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{7}{10}$.
Kam lygu $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$?
A $\frac{19}{10}$ **B** $\frac{17}{10}$ **C** $\frac{9}{7}$ **D** $\frac{3}{2}$ **E** $\frac{10}{7}$

S30. Žaidimo lentoje yra trys apskritimai su pažymėtais taškais $A_1, A_2, \ldots, A_{25}, B_1, B_2, \ldots, B_{12}, C_1, C_2, \ldots, C_{18}$. Lentoje žaidėjo loštukas startuoja iš taško A_1 ir užima naują padėtį pagal tokią taisyklę: *kiekvienu ėjimu galima peršokti du tarpelius tame pačiame apskritime tiek prieš, tiek pagal laikrodžio rodyklę.*



Pavyzdžiui, iš C_5 galima atlikti ėjimų seką $C_5 \to C_3 \to C_1(=A_{22}) \to A_{20} \to \to A_{18} \to A_{20}$, bet negalima iš C_2 iš karto eiti į A_{23}. Kiek yra pažymėtų taškų, į kuriuos negali patekti loštukas?
A 0 **B** 6 **C** 15 **D** 27 **E** 30

SPRENDIMAI

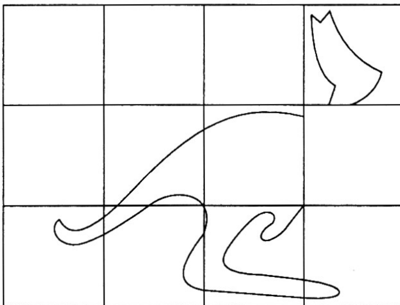
MAŽYLIS (III ir IV klasės)

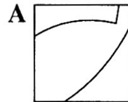
M1. Ⓒ 4

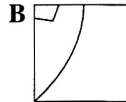
Pirmų dviejų dėmenų suma lygi 4, o toliau kiekvieną kartą kiek atimame, tiek ir pridedame. Vadinasi, teisingas atsakymas **C**.

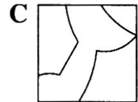
M2. Ⓑ

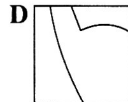
Geriausia ieškoti paveikslėlio, kuriame linija išeina iš apatinio kairiojo kampo. Toks yra tik paveikslėlis **B**.



A


B


C


D


E

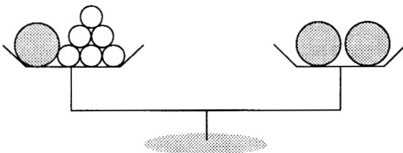

Teisingas atsakymas **B**.

M3. Ⓓ 23

Reikia sudėti $10 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$. Gauname 23.
Teisingas atsakymas **D**.

M4. Ⓔ 6

Vienas melionas ir 6 apelsinai atsveria 2 melionus. Nuimkime nuo lėkštelių po vieną melioną. Svarstyklės liks pusiausviros, ir vienoje lėkštelėje bus 6 apelsinai, kitoje — vienas melionas.



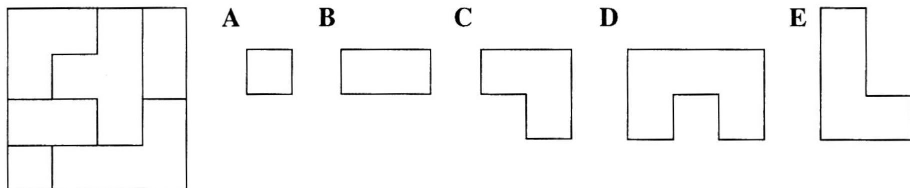
Teisingas atsakymas **E**.

M5. Ⓒ 8

Patogu numerius dalyti į grupes nuo 1 iki 9, nuo 10 iki 19 ir nuo 20 iki 24. Pirmoje grupėje turime tik vieną dvejetą (numeryje 2), antroje — taip pat vieną (numeryje 12), trečioje grupėje 5 dvejetus pirmoje vietoje ir 1 dvejetą — antroje (numeryje 22). Iš viso turime $1 + 1 + 6 = 8$ dvejetus.
Teisingas atsakymas **C**.

M6. Ⓓ

Nesunku kvadrate rasti figūras **A**, **B**, **C**, **E**. Galime ir pasitikrinti — figūros **D** tikrai nerandame.



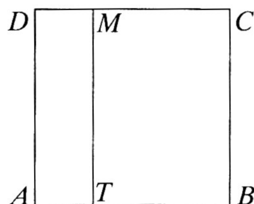
Renkamės atsakymą **D**.

M7. Ⓒ 4200

Kadangi valandoje yra 60 minučių, tai per valandą širdis muša maždaug $70 \times 60 = 4200$ kartų. Teisingas atsakymas **C**.

M8. Ⓐ 14

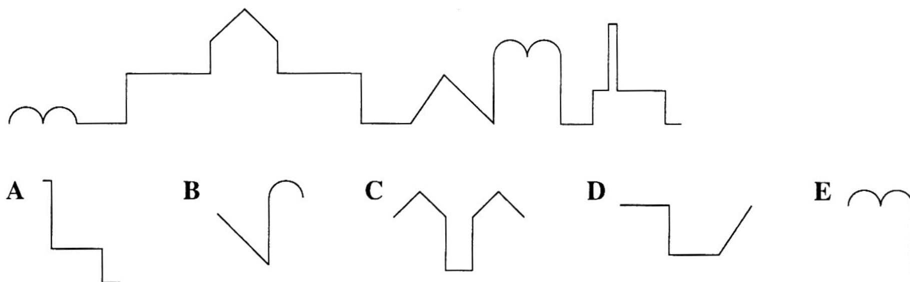
Kvadrato $ATMD$ perimetras lygus $(10+3)2 = 26\,\text{cm}$, todėl $ABCD$ perimetras didesnis $40 - 26 = 14\,(\text{cm})$.
Teisingas atsakymas **A**.



Galima neskaičiuoti perimetrų. Kvadratas $ABCD$ ir stačiakampis $ATMD$ turi po dvi lygias kraštines, todėl jų perimetrai skiriasi dvigubai tiek, kiek AB ilgesnė už AT, t. y. $2(10-3) = 14\,(\text{cm})$.

M9. Ⓒ

Pažiūrėję į paveikslėlį matome, kad jame nėra dviejų smailių vieno lygio „stogų“. Vadinasi, paveiksle tikrai nėra figūros **C**.
Renkamės atsakymą **C**.



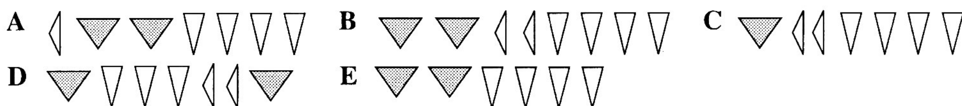
Pažiūrėję paveikslėlį, dešiniajame jo gale randame figūrą **A**. Figūrą **B** aptinkame paveikslėlio dešinėje pagal stogo pusapskritimį. Figūrą **D** matome į kairę nuo vietos, kur radome **B**. Figūrą **E** vėl lengvai aptinkame pagal dviejų pusapskritimių stogą. Vadinasi, paveikslėlyje nerandame tik figūros **C**.
Teisingas atsakymas **C**.

M10. Ⓐ 3

! Kadangi mažiausias dviženklis skaičius yra 10, o didžiausias vienaženklis 9, tai gauname $(10 + 17) : 9 = 3$.
Teisingas atsakymas **A**.

M11. Ⓔ

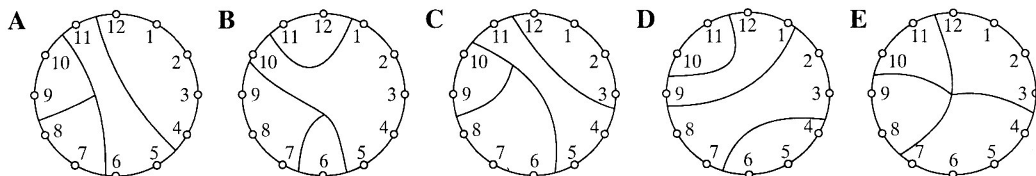
? Kadangi „surinkti“ reikia 124, tai skaičiuje turi būti dukart po šešiasdešimt (▽) — kitaip neužteks „ženklų“. Tokie yra užrašai **A**, **B**, **D**, **E**. Bet užraše nebeturi būti dešimties (◁), nes tada skaičius būtų didesnis už 130.
Renkamės atsakymą **E**.



! Iki pilno sprendimo trūko nedaug: patikrinti, ar **E** tikrai reiškia 124. Matome, kad užraše **E** yra dukart 60 ir keturiskart vienetas (▽), o $2 \cdot 60 + 4 \cdot 1 = 124$.
Teisingas atsakymas **E**.

M12. Ⓒ

? Tikrinkime paveikslėlius paeiliui. Paveikslėlyje **A** suma $7 + 8 = 15$ daug skiriasi nuo sumos $11 + 5 + 6 = 22$, taigi **A** netinka. Paveikslėlyje **B** skaičius 6 daug skiriasi nuo sumos $7 + 8 + 9$, ir **B** netinka. Paveikslėlyje **C** sumos yra $11 + 4 + 5$, $10 + 9$, $8 + 7 + 6$ ir $12 + 1 + 2 + 3$, t. y. 20, 19, 21 ir 18, taigi tinka.
Renkamės atsakymą **C**.



! Gauti griežtą atsakymą nebesunku: užtenka patikrinti, kad **D** ir **E** netinka. Atveju **D** daug skiriasi sumos, pavyzdžiui, $10 + 11$ ir $4 + 5 + 6$, o atveju **E** — sumos $10 + 11$ ir $9 + 8$ (kadangi sumos turi būti paeiliui einantys skaičiai, tai jos gali skirtis daugiausiai 3 vienetais).
Teisingas atsakymas **C**.

!! Iš karto galima nustatyti, kokios turi būti skaičių sumos. Kadangi $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = (1 + 12) + (2 + 11) + \cdots + (6 + 7) = 13 \cdot 6 = 78$, tai keturių sumų suma lygi 78. Kadangi kraštinių pagal dydį sumų suma lygi vidurinių sumai, tai vidurinių sumų suma yra 39, o pačios sumos yra 19 ir 20. Todėl likusios dvi sumos yra 18 ir 21. Kadangi paveikslėlyje **A** yra suma 15, tai jis netinka. Paveikslėlyje **B** yra suma 6, paveikslėlyje **D** — suma 14, paveikslėlyje **E** — suma 22. Vadinasi, gali tikti tik paveikslėlis **C**. Ir iš tikrųjų — ten sumos yra 18, 19, 20 ir 21.

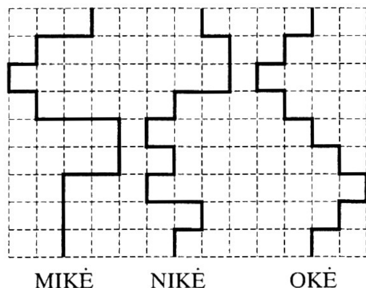
M13. Ⓐ Tadas turi šunį

? Tadas turi šunį arba katę — priešingu atveju neteisingi bus sakiniai **A** ir **D**. Jei Tadas turėtų šunį, tai neteisingi būtų sakiniai **D** ir **E**. Vadinasi, Tadas turi katę, ir neteisingas sakinys **A**.
Renkamės atsakymą **A**.

! Iš sąlygos aišku, kad Vytas turi kanarėlę. Kadangi Matas ir Tadas negali turėti žuvytės, tai žuvytę turi Julius. Matas nemėgsta kačių, todėl turi šunį. Vadinasi, katę turi Tadas. Matome, kad iš sakinių **A**, **B**, **C**, **D** ir **E** neteisingas tik **A**, o kiti teisingi.
Teisingas atsakymas **A**.

M14. Ⓔ Mikė ir Nikė finišavo vienu metu

! Atspėti sakinį čia nepavyks — reikia suskaičiuoti kengūrų kelius. Jeigu laikysime, kad schemos langeliai vienetiniai, tai Mikės ir Nikės kelią sudaro po 18 langelių, o Okės — 17 langelių. Matome, kad pirmi 4 sakiniai neteisingi, o teisingas tik penktas sakinys.



Teisingas atsakymas **E**.

M15. Ⓓ Elena

? Pradėkime spėlioti nuo Julės — sakykime, kad ji gimė gegužės 17 d. Bet Zita negalėjo gimti 17 dieną, todėl **A** netinka.
Jei teisingas atsakymas **B**, tai Zita taip pat būtų gimusi gegužės mėnesį, o tai prieštarauja sąlygai.
Jei teisingas atsakymas **C**, tai Julė gimė taip pat 17 dieną, — neteisybė.
Galima jau būtų rinktis atsakymą **D**, bet trukdo atsakymas **E** — o gal iš tikrųjų garantuotai nieko nustatyti neįmanoma?
Taigi imkime atsakymą **D** — Elena gimė gegužės 17 dieną. Tada Kamilė ir Zita galėjo gimti atitinkamai kovo 1 d. ir kovo 21 d., o Julė — liepos 21 d.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi Kamilė ir Zita gimusios tą patį mėnesį, tai tas mėnuo — kovas. Kadangi Julė ir Zita gimė tą pačią mėnesio dieną, tai Zita gimė kovo 21 d. Vadinasi, gegužės 17 galėjo gimti tik Elena.
Teisingas atsakymas **D**.

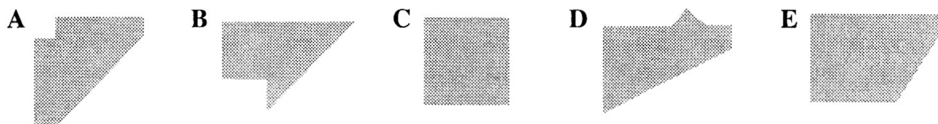
M16. Ⓒ

? Kadangi šešeto tarp atsakymų nėra, tai 6 yra mažesnioji stačiakampio kraštinė.
Tikriname atsakymus. 30 degtukų perdaug — vien stačiakampio perimetras būtų didesnis už 60.
Tikriname **B** — 18 degtukų. Tada stačiakampio perimetras $2(18+6) = 48$, o 12 degtukų nebeužtenka trikampiui. Tikriname **C** — tada stačiakampio perimetras $2(15 + 6) = 42$, trikampio perimetras $3 \cdot 6 = 18$, ir viskas išeina gerai.
Renkamės atsakymą **C**.

! Žinoma, geriausia skaičiuoti. Samanta sunaudojo trikampiui 18 degtukų, taigi stačiakampiui liko 42. Dviem kraštinėms bus sunaudota $2 \cdot 6 = 12$ degtukų, taigi liks 30. Jie ir bus panaudoti kaip kitos dvi kraštinės — vadinasi, kraštinės bus po 15 cm. Jos didesnės už 6 cm kraštines.
Teisingas atsakymas **C**.

M17. Ⓑ

Turint popieriaus lapą (pavyzdžiui, tą patį konkurso lapą) nesunku įsitikinti, kad perlenkus vieną kartą galima gauti figūras **A**, **C**, **D** ir **E**.
Renkamės atsakymą **B**.



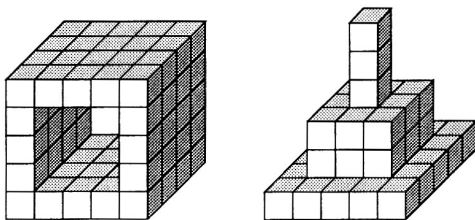
Sunkiau įsitikinti, kad tikrai negalima gauti figūros **B**. Samprotauti galima taip. Kadangi figūroje **B** stačiakampis susiaurėjo lygiagrečiai, tai buvo lenkiama per tiesę, lygiagrečią pagrindams. Bet taip pat aišku, kad jis buvo lenkiamas per pasvirąją tiesę, vadinasi, buvo lenkiamas du kartus.
Teisingas atsakymas **B**.

M18. Ⓑ 7:20

Marytė eina į mokyklą $5+32=37$ minutes, Zita eina $37-12=25$ minutes. Zita atėjo į mokyklą 7:45, todėl iš namų ji išėjo 7:20.
Teisingas atsakymas **B**.

M19. Ⓓ 18

Nesunku suskaičiuoti, kad tunelį sudaro $5+3+5+3$ „strypai", kurių ilgis (iš priekio į užpakalį) 4.



Vadinasi, jame yra $16\times 4=64$ kubeliai. Piramidėje yra $5\times 5+3\times 3\times 2+3=46$ kubeliai. Taigi nepanaudota liko $64-46=18$ kubelių.
Teisingas atsakymas **D**.

M20. Ⓒ 7

Sakykime, kad teisingas atsakymas **A** — Petras pagavo 21 žuvį. Bet tada su Luku jie pagavo 42 žuvis — perdaug.
Sakykime, kad Petras pagavo 14 žuvų (**B**), tada su Luku jie pagavo 28 žuvis. Taigi Jonui ir jo sūnui lieka 7 žuvys. Bet jeigu Jono sūnus pagavo 1 žuvį, tai Jonas 3 — per mažai, o jeigu sūnus pagavo 2 žuvis — Jonas 6 — per daug.
Sakykime, kad Petras ir Lukas pagavo po 7 žuvis (**C**). Tada Jonui ir jo sūnui lieka 21 žuvis. Bet jei sūnus pagavo 5 (ar mažiau), tai Jonas 15 (ar mažiau) — per mažai. O jeigu sūnus pagavo 6 (ar daugiau), tai Jonas — 18 (ar daugiau) — per daug.
Panašiai netinka ir atsakymas **D**. Jei Petras ir Lukas pagavo po 6 žuvis, tai Jonas ir sūnus — 23 žuvis. Bet ir vėl sūnui 5 žuvys per mažai, o šešios per daug.
Liko atsakymas **E**. Galima jį ir pasirinkti — „Kengūra" garantuoja, kad bent vienas atsakymas teisingas.
Renkamės atsakymą **E**.

?? Beje, jau pajutome, kad čia kažkas ne taip. Tikrinkime ir atsakymą **E**. Tada Petras ir Lukas pagavo 0 žuvų, o Jonas ir sūnus — 35 žuvis. Bet ir vėl: 8 sūnaus žuvų — per mažai ($8 + 3 \cdot 8 = 32$), o 9 — per daug ($9 + 3 \cdot 9 = 36$).
Priseina spręsti dilemą: ar sąlygoje apsirikta, ar tyčia kažkas susukta. Ir čia vienaip ar kitaip reikia įsigudrinti savęs paklausti — o kiek gi žmonių dalyvavo žūklėje. Normaliai skaitant išeitų, kad keturi. Bet formaliai — o gal ir trys. Tada aišku, kad Jono sūnus yra Petras, ir lengvai randame teisingą atsakymą.

! Žūklėje galėjo dalyvauti 4 arba 3 žmonės. Jeigu joje buvo 4 žmonės, tai Petras ir Lukas sugavo lyginį žuvų skaičių, Jonas ir sūnus — taip pat lyginį žuvų skaičių, taigi visi jie sugavo lyginį žuvų skaičių, o ne 35.
Jeigu žūklėje buvo 3 žmonės, tai Petras — Jono sūnus. Jeigu Petras ir Lukas sugavo po x žuvų, tai Jonas sugavo $3x$ žuvų, ir $x + x + 3x = 35$, $x = 7$. Taigi Petras sugavo 7 žuvis.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Kas atsitiktų su uždaviniu, jeigu išbrauktume Petro sūnaus vardą (Lukas)? Po to tarsi galėtų būti dar viena galimybė: Jonas — Petro sūnus. Tada jei Jono sūnus pagavo y žuvų, tai Jonas $3y$ žuvų, o Petras — taip pat $3y$, ir $3y + 3y + y = 35$, $y = 5$. Taigi Petras būtų pagavęs 15 žuvų, bet toks atsakymas neduotas. Matyt, tektų samprotauti „kengūriškai“. Kadangi atsakymo 15 nėra, o „Kengūros“ vienas atsakymas visada teisingas, tai pastaroji situacija neįmanoma, ir Petras — Jono sūnus (o ne tėvas).
Beje, uždavinys — tam tikras pokštas, ir malonu buvo matyti, kaip trečiokas tai po konkurso aiškina nesusigaudžiusiam situacijoje broliui šeštokui (tas gyrėsi: aš parašiau 0 — „tuščia aibė“). Daugelyje šalių buvo iš karto parašyta, kad tai uždavinys-pokštas, bet tada kam iš viso jį duoti... Lietuviškai uždavinį pavyko suformuluoti taip, kad pokštas pasidarytų prasmingas.

M21. Ⓒ 8

! Patogiausia kaip nors sužymėti muzikantus, pavyzdžiui, smuikininkus — raidėmis A, B, pianistus — raidėmis P, R, violončelininkus — raidėmis V, Z. Tada paprasta abėcėliškai surašyti visas galimas trio sudėtis:

$$APV, APZ, ARV, ARZ, BPV, BPZ, BRV, BRZ.$$

Jų yra 8, taigi meno vadovui prireiks 8 perklausų.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Žinoma, aukštesniųjų klasių moksleiviai gali remtis vadinamąja daugybos taisykle:
Jeigu reikia nuveikti tris darbus, ir pirmą darbą galima atlikti a būdų, antrą darbą — b būdų ir trečią — c būdų, tai visus tris darbus galima nuveikti abc būdų.
Kadangi smuikininką galima pasirinkti 2 būdais, pianistą — 2 būdais ir violončelininką — 2 būdais, tai trio sudaryti galima $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ būdais.

M22. Ⓓ 21

? Jeigu yra 16 plytelių, tai iš karto galima iškalti 16 medalių, taigi atsakymai **A**, **B** ir **C** atkrinta. Deja, renkantis iš atsakymų **D** ir **E**, geriau skaičiuoti.

! Kadangi iškirtus 4 ruošinius iš atlikusio aukso galime pagaminti dar 1 plytelę, tai iškirtus 16 ruošinių galima pagaminti dar 4 plyteles. Iškirtus iš tų 4 plytelių ruošinius iš atliekų vėl galima pagaminti 1 plytelę, o iš jos — ruošinį. Taigi iš viso galima pagaminti 21 medalį.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Tokiuose uždaviniuose kartais kyla abejonių, ar galutinis medalių skaičius priklauso nuo to, kada iš atliekų sulydomos plytelės. Pavyzdžiui, galima gaminti naują plytelę, kai tik atsirado 4 ruošinių atliekų, o galima sunaudoti visas plyteles, o tik tada gaminti naujas. Šis sunkumas apeinamas samprotaujant taip.
Tarkime, kad vienos plytelės masė yra 4 garatai (garatą mums pavyko sulipdyti iš gramo ir karato). Kadangi iš 4 plytelių lieka masės vienai plytelei, tai 4 ruošiniams sunaudojama 12 garatų aukso, o vienam ruošiniui — 3 garatai. Kadangi iš viso turėta 16 plytelių, tai jų masė — 64 garatai. Tai reiškia, kad pagaminus 21 ruošinį, dar liks 1 garatas, bet pagaminti 22 ruošinius aukso neužtenka. O štai kaip pagaminti 21 ruošinį — jau žinome.

M23. Ⓔ 10

! Čia tikrinti atsakymus visiškai paprasta. Atveju **A** prieš Tomą buvo 15 mokinių, už Tomo 12 — netinka. Atveju **B** prieš buvo 16, už — 11, — netinka. Atveju **C** prieš Tomą buvo 7 mokiniai, už Tomo — 20. Atveju **D** prieš buvo 8, už — 19. Pagaliau atveju **E** prieš Tomą buvo 9 mokiniai, už Tomo — 18, o 18 iš tikrųjų yra dvigubai daugiau už 9.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad Tomas užėmė x-tąją vietą. Tada prieš jį buvo $x-1$ mokinys, o už jo buvo $28-x$ mokiniai. Todėl

$$28 - x = 2(x - 1),$$

taigi $28 - x = 2x - 2$, $28 = 3x - 2$, $30 = 3x$, $x = 10$.
Žinoma, kadangi lygtis yra pirmojo laipsnio, tai nesunku apsieiti ir be jos. Kadangi iš viso buvo 28 mokiniai, tai be Tomo jų buvo 27. Kadangi už jo buvo dvigubai daugiau mokinių nei prieš jį, tai prieš jį buvo trečdalis tų mokinių, t. y. $27 : 3 = 9$. Kadangi prieš Tomą buvo 9 mokiniai, tai jis užėmė 10 vietą.

M24. Ⓓ 21

? Uždavinys labai patogus spręsti tikrinant atsakymus. Iš tikrųjų: po 1 kilometro (atsakymas **E**) skaitiklis rodys 187 570, šie skaitmenys ne visi skirtingi — yra du septynetai. Po 21 kilometro (**D**) rodmuo bus 187 590, o šis skaičius neturi vienodų skaitmenų.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kol kas mes neįrodėme, kad tik po 21 km pirmą kartą rodmuo bus skaičius, sudarytas iš skirtingų skaitmenų. Bet įrodyti tai nesunku: užtenka surašyti rodmenis po 1, 2, ..., 20 kilometrų ir įsitikinti, kad jie netenkina sąlygos. Elkimės kiek ekonomiškiau. Jau matėme, kad po 1 km rodmuo bus 187 570, ir rodmenyje yra du septynetai. Tas septynetas nesikeis ir po 2, ir po 3, ..., ir po 9 kilometrų, ir tik kai bus nuvažiuota 11 kilometrų, rodmuo taps 187 580. Dabar nauja bėda — turime du skaitmenis 8, ir kad antras aštuonetas išnyktų, reikia nuvažiuoti dar 10 kilometrų. Taigi po 21 km rodmuo bus 187 590.
Teisingas atsakymas **D**.
Skaitytojui siūlome surasti dar 6 tokius rodmenis.

BIČIULIS (V ir VI klasės)

B1. Ⓑ 2323

? Skaičius, kuris skaitomas abejaip nepasikeičia, jau bent prasidėti ir baigtis turi tuo pačiu skaitmeniu. Tik skaičius **B** yra ne toks. Renkamės atsakymą **B**.

! Nuosekliai patikrinę visus skaičius, matome, kad skaičiai **A**, **C**, **D** ir **E** tą savybę turi — skaičius **B** neturi.
Teisingas atsakymas **B**.

B2. Ⓒ Žr. uždavinio M9 sprendimą.

B3. Ⓓ 5

! Žinoma, čia nori mus apgauti. Jeigu kiekviena iš trijų dukterų turėtų po 2 saldainius, tai jos turėtų $3 \cdot 2 = 6$ saldainius. Bet jei viena iš jų turi du brolius, tai ir kitos turi tuos pačius du brolius. Vadinasi, Petraičiai turi $3 + 2 = 5$ vaikus.
Teisingas atsakymas **D**.

B4. Ⓒ Žr. uždavinio M20 sprendimą.

B5. Ⓐ Pirmadienį

! Kadangi porytojus buvo ketvirtadienis, tai aš žiūrėjau į kalendorių antradienį, todėl mano gimtadienis buvo pirmadienį.
Teisingas atsakymas **A**.

B6. Ⓓ

? Kadangi juodų širdelių turi būti dvigubai daugiau, tai iš karto žiūrime į **D**.



Iš tikrųjų — ten 4 juodos ir 2 baltos širdelės.
Renkamės atsakymą **D**.

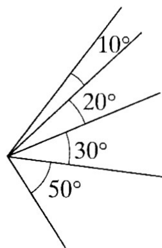
! Suregistruokime širdelių skaičių taip: juodos, baltos, iš viso. Tada vėriniuose turime $2 + 3 = 5$, $6 + 4 = 10$, $6 + 6 = 12$, $4 + 2 = 6$, $2 + 4 = 6$. Vėriniai **A** ir **B** netinka, nes dvi trečiosios visų širdelių nėra sveikasis skaičius. Vėrinys **C** netinka, nes juodų širdelių nėra du trečdaliai, o pusė. Vėrinyje **D** juodų širdelių 4, o tai iš tikrųjų yra dvi trečiosios visų širdelių: $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. Pagaliau, vėrinyje **D** juodų širdelių yra $\frac{2}{6}$, t. y. viena trečioji.
Teisingas atsakymas **D**.

B7. Ⓓ $10\,000 \cdot 100 \cdot 10$

! Čia spėlioti neverta — paprasčiau skaičiuoti. **A** gauname $10 \cdot 0{,}001 \cdot 100 = 0{,}001 \cdot 1000 = 1$; **B** gausime mažiau; **C** gauname $100 \cdot 100 = 10\,000$; **D** gauname dar daugiau: $10\,000\,000$, o **E** — mažiau kaip $10\,000$.
Teisingas atsakymas **D**.

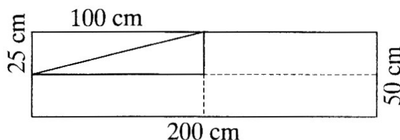
B8. Ⓒ 8

! Čia svarbu susidaryti sistemą — taisyklę sau, kaip skaičiuoti ir nieko nepraleisti. Galima elgtis taip. Iš pradžių imkime kampus, sudarytus dviejų gretimų spindulių — 10°, 20°, 30°, 50°. Po to imkime kampus, sudarytus iš dviejų mažesnių — 30°, 50°, 80°. Dabar — kampus, sudarytus iš 3 mažesnių — 60° ir 100°. Pagaliau imame kampą, sudarytą iš visų 4 kampų — 110°. Gavome 8 skirtingų didumų kampus: 10°, 20°, 30°, 50°, 60°, 80°, 100°, 110°. Teisingas atsakymas **C**.



B9. Ⓔ $1250\,\text{cm}^2$

? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo to, koks tas stačiakampis, tai galima pasirinkti, pavyzdžiui, stačiakampį $50\,\text{cm} \times 200\,\text{cm}$. Tada kalbamojo stačiojo trikampio kraštinės bus 25 cm ir 100 cm, o jo plotas lygus $25 \cdot 50 = 1250\,(\text{cm}^2)$.
Renkamės atsakymą **E**.



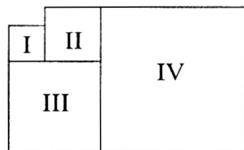
! Iš brėžinio matome, kad trikampis sudaro pusės stačiakampio pusės pusę, t. y. aštuntadalį stačiakampio. Stačiakampio plotas lygus $200 \cdot 50\,\text{cm}^2$, o ploto aštuntadalis lygus $25 \cdot 50 = 1250\,(\text{cm}^2)$.
Teisingas atsakymas **E**.

B10. Ⓐ 864

! Didžiausias triženklis skaičius su skirtingais skaitmenimis yra 987, o mažiausias — 123. Jų skirtumas 864.
Teisingas atsakymas **A**.

B11. Ⓒ 64 m

? IV kvadrato kraštinė iš akies maždaug 2,5 karto didesnė už II kvadrato kraštinę. Todėl IV kvadrato perimetras galėtų būti $24 \cdot 2{,}5 = 60\,(\text{m})$.
Renkamės atsakymą **B**.



! Žinoma, paprasčiau skaičiuoti. I kvadrato kraštinė lygi 4 m, II — 6 m, todėl III — lygi $4+6 = 10\,(\text{m})$. Vadinasi, IV kvadrato kraštinė lygi $10 + 6 = 16\,(\text{m})$, o perimetras lygus 64 m. Taigi spėdami apsirikome.
Teisingas atsakymas **C**.

B12. Ⓓ Žr. uždavinio M22 sprendimą.

B13. Ⓐ 3 m

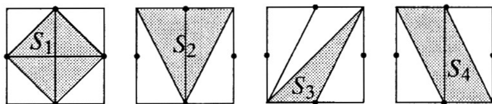
? Dabar salės tūris $60\,\text{m}^3$. Jeigu ją paaukštinsime 5 m, tūris bus $4 \cdot 5 \cdot 8 = 160\,(\text{m}^3)$ ir padidės net $100\,\text{m}^3$. Todėl imame kuo mažesnį atsakymą — 3 m. Tada tūris bus $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120\,(\text{m}^3)$, o tai kaip tik $60\,\text{m}^3$ daugiau.
Renkamės atsakymą **A**.

! Paaukštinus salę, ji „paaugs“ stačiakampiu gretasieniu, kurio pagrindas $4\,\text{m} \times 5\,\text{m}$, o aukštis $60 : 4 : 5 = 3\,(\text{m})$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Dabar salės tūris $60\,m^3$. Kad jis padidėtų dar $60\,m^3$, jis turi padvigubėti. Vadinasi, salę reikia paaukštinti dar tiek pat — 3 metrais.

B14. Ⓑ $S_3 < S_1 = S_2 = S_4$

? Iš akies matome, kad S_3 mažiausias, o kiti plotai lygūs.
Renkamės atsakymą **B**.



! Padaliję kvadratus kaip parodyta brėžiniuose, matome, kad plotas S_1 sudaro $\frac{4}{8}$ kvadrato ploto (4 iš 8 lygių trikampių), plotas S_2 — $\frac{2}{4}$ kvadrato, S_4 — $\frac{2}{4}$ kvadrato, t. y. visi jie lygūs pusei kvadrato ploto. Matome, kad sritis S_3 yra mažiau už pusę kvadrato, atkirsto įstrižaine.
Vadinasi, teisingas atsakymas **B**.

!! Jau suskaičiavome, kad $S_1 = S_2 = S_4$. Bet iš trečio paveikslo matome, kad du trikampiai, lygūs S_3, sudaro figūrą, lygią S_4. Taigi $S_3 = \frac{1}{2}S_4$, ir vėl apsiėjome be ploto formulių.

B15. Ⓐ Žr. uždavinio M13 sprendimą.

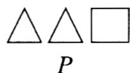
B16. Ⓓ 20%

? Pradėkime spėlioti. Jeigu druska sudarytų 25%, tai vandens būtų 75% — tris kartus daugiau. Jeigu druska sudarytų 20%, tai vanduo — 80%, keturis kartus daugiau. Taip ir yra uždavinyje.
Renkamės atsakymą **D**.

! Mūsų spėjimas buvo gana rizikingas — geriau skaičiuoti. Kadangi tirpalo masė bus 250 g, o druska sudarys penktadalį, tai jos bus 20%.
Teisingas atsakymas **D**.

B17. Ⓐ $P < S < Q$

? Pažymėkime trikampio, kvadrato ir apskritimo mases t, k ir a.


P


Q


R


S

Jeigu būtų (**E**) $R = S$, tai būtų $k = a$. Bet tada $Q < R$ duoda $a < t$, t. y. $P > Q$, — prieštara. Jeigu būtų (**D**) $R < S$, tai būtų $k < a$. Tada iš $P < Q$, $t < a$, ir gautume $R > Q$, — prieštara. Jeigu būtų (**C**) $S < P$, tai būtų $a < t$, ir gautume $P > Q$. Jeigu būtų **B**, tai būtų $S > Q$, $t > a$ ir $P > Q$. Lieka atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.

?? Jeigu būtų $S \geqslant Q$, tai būtų $t \geqslant a$, o tada $P \geqslant Q$. Todėl atkrenta atsakymai **B**, **D** ir **E**. Atkrenta ir atsakymas **C**, nes tada būtų $a < t$, taigi $P > Q$. Lieka atsakymas **A**.

! Kadangi $P < Q$, tai atmetę po kvadratą, gauname $2t < 2a$, $t < a$. Kadangi $Q < R$, tai atmetę po kvadratą gauname $2a < k + t$. Todėl $S = k + t + a > k + t + t = P$. Kita vertus, $S = k + t + a < k + a + a = R$. Vadinasi, $P < S < Q$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Iš $P < Q$ turime $t < a$, iš $Q < R$ — kad $2a < k + t$. Bet tada $2a < k + a$, t. y. $a < k$. Taigi $t < a < k$. Iš čia $P < S$, $Q > S$.

!!! Kadangi $2S = Q + P$, tai $2P < 2S < 2Q$ ir $P < S < Q$. Bet tada dėl nelygybės $P < S$ atkrinta atsakymas **C**, o dėl nelygybės $S < Q$ — atsakymai **B**, **D** ir **E**.

B18. Ⓐ $\frac{1}{5}$

? Sakykime, kad erdvę sudaro 120 ląstelių. Tada po pirmos dienos liko 60 ląstelių, po antros $60-20 = 40$, po trečios $40 - 10 = 30$, po ketvirtos $30 - 6 = 24$ ląstelės. Tai sudaro $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$ visų ląstelių. Galėtų kilti klausimas — o kas, jeigu erdvę sudaro ne 120 ląstelių, o kitas skaičius? Gudrybė čia paprasta: ląstele pavadinkime $\frac{1}{120}$ erdvės dalį. Taigi sprendimas pasidaro visiškai griežtas (ir net „be trupmenų“).
Teisingas atsakymas **A**.

! Pirmą dieną virusas sunaikino $\frac{1}{2}$ erdvės, liko $\frac{1}{2}$. Antrą dieną sunaikino $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, liko $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{12}$. Trečią dieną sunaikino $\frac{4}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, liko $\frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. Ketvirtą dieną sunaikino $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$, liko $\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

!! Skaičiuoti galima ir kitaip. Po pirmos dienos liko $\frac{1}{2}$ erdvės, po antros — liko $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, po trečios $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, po ketvirtos — $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

B19. Ⓑ 10

? Didžiausią triženklio skaičiaus skaitmenų sumą gausime, kai visi trys skaitmenys devynetai: $9 + 9 + 9 = 27$. Gautos sumos skaitmenų suma lygi 9.
Renkamės atsakymą **A**.

! Įsitikinkime, kad mūsų spėjimas buvo per greitas. Aišku, kad mažinant skaitmenis galima gauti bet kurią trijų skaitmenų sumą nuo 27 iki 1. Galima peržiūrėti visas šias reikšmes ir nustatyti didžiausią galimą. Bet tai atlikti galima išradingiau: jeigu tos sumos pirmas skaitmuo 2, tai antras ne didesnis už 7, ir gauname ne daugiau kaip 9. Jeigu pirmas skaitmuo 1, tai antras gali būti net 9, ir gauname sumą 10. Jeigu ta reikšmė vienaženklė — vėl gausime daugiausia tik 9. Vadinasi, didžiausia galima reikšmė 10.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Nustatykime, kurių skaičių skaitmenų sumos skaitmenų suma („antroji“ skaitmenų suma) bus lygi 10 (žinoma, uždavinys to visai neprašo). Matėme, kad triženklio skaičiaus skaitmenų suma turi būti lygi 19. Aišku, kad tai gali būti skaičiai, kurių skaitmenų trejetai yra 199, 289, 379, 388, 469, 478, 559, 568, 577, 667 (tuos skaitmenis galima perstatyti).

B20. Ⓒ 239 kg

! Kiekvienas berniukas pasisvėrė su kitais keturiais, todėl jo svoris rezultatuose įskaitytas 4 kartus. Taigi sudėję visus rezultatus, gausime keturgubą reikiamą sumą S. Taigi

$$4S = 10 \cdot 90 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 10 + 11 =$$
$$= 10 \cdot 90 + (2 + 3 + \cdots + 11) - 9 = 10 \cdot 90 + 13 \cdot 5 - 9 = 10 \cdot 90 + 13 \cdot 4 + 13 - 9,$$

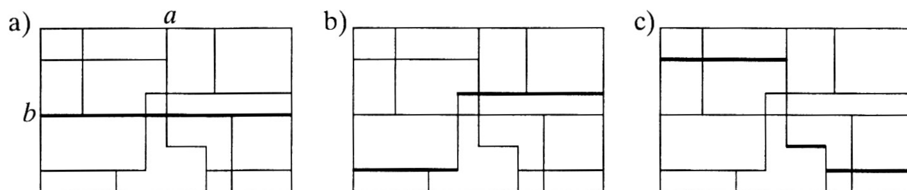
ir $S = 5 \cdot 45 + 13 + 1 = 225 + 14 = 239$ (kg).
Teisingas atsakymas **C**.

B21. Ⓓ 39

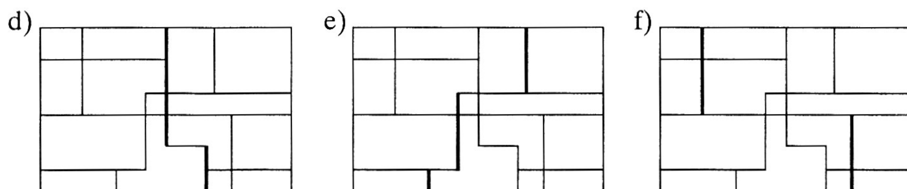
! Skaičiaus 3 kartotinių nuo 3 iki 99 yra 33. Be jų, dar reikia įskaityti dviženklius skaičius, kurie baigiasi trejetu, bet nėra kartotiniai. Tokių skaičių pirmas skaitmuo nesidalija iš 3, o tokių yra $9 - 3 = 6$. Vadinasi, suplosi pasakęs $33 + 6 = 39$ skaičius.
Teisingas atsakymas **D**.

B22. Ⓐ $3(a+b)$

! Čia būtina susigalvoti sistemą — kitaip visai susipainiosi.



Iš tikrųjų — geriausia stengtis sudaryti iš atkarpų visą kraštinę. Imkimės horizontaliųjų atkarpų. Čia padeda stačiakampio „vidurinė linija“ — ji lygi a (žr. a) pav.). Nesunku aptikti ir antrąją (žr. b) pav.). Lieka lygiai trečioji (žr. c) pav.).



Dabar, jau pasimokę, lengvai randame vertikaliąsias atkarpas, kurių ilgių suma duoda b. Iš pradžių einame vėl vidurine vertikalia linija, ir gauname d). Nesunku pastebėti ir antrus gana taisyklingus „laiptus“, esančius arti vidurio (žr. e) pav.). Lieka treti vieno laiptelio laiptai kairiausios ir dešiniausios vertikaliųjų atkarpų (žr. f) pav.).
Teisingas atsakymas **A**.

B23. Ⓐ

? Pradėkime nuo vidurinio atsakymo **E**. Jeigu į pakalnę nusileisti truko 28 minutes, tai į kalną — $28 \cdot \frac{20}{12} = \frac{140}{3}$ (min). Kad laiko skirtumas būtų sveikas, turi būti sveikas ir pakilimo laikas, t. y. jis turi dalytis iš 3. Toks yra tik atsakymas 24.
Renkamės atsakymą **A**.

! Pereikime visur prie minučių. Į kalną dviratininkas važiavo $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ (km/min) greičiu, nuo kalno — $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ (km/min). Jeigu įkalnės (ir nuokalnės ilgis) S km, tai į kalną jis važiavo $S : \frac{1}{5} = 5S$ (min), o nuo kalno — $S : \frac{1}{3} = 3S$ (min). Turime lygtį $5S - 3S = 16$, $S = 8$. Todėl nusileisti į pakalnę truko $3 \cdot 8 = 24$ minutes.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Galima sudaryti ir kitokią lygtį. Jeigu nusileisti į pakalnę truko x (min), tai į kalną $x + 16$ (min). Kadangi kelias į kalną ir į pakalnę vienodi, tai

$$12(x+16) = 20x, \quad 8x = 12 \cdot 16, \quad x = 24.$$

B24. Ⓔ 150

? Sakykime, kad 15 katinų per 15 h suėda 60 pelių. Tada 15 katinų per 1,5 h suėda 6 peles, o 1,5 katino per tą laiką — tik 0,6 pelės. Vadinasi, reikia atsakymą gerokai (2,5 karto) didinti.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi pusantro katino suėda pusantros pelės (per 1,5 h), tai 15 katinų per tą patį laiką suės 10 kartų daugiau — 15 pelių, o per 10 kartų didesnį laiką jie suės dar 10 kartų daugiau pelių — 150.
Teisingas atsakymas **E**.

B25. (A) 23

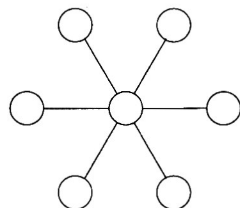
? Aišku, kad 22 rutuliukų neužtenka: Ada gali paimti 14 raudonų ir 8 baltus rutuliukus. Renkamės atsakymą **A**.

! Iš esmės aišku, kad spėjimas ? yra sprendimas. Iš tikrųjų, jeigu paimsime 23 rutuliukus, tai jų tikrai bus visokių spalvų (jeigu kurios nors spalvos nebūtų, tai nebūtų mažiausiai 6 rutuliukų, ir liktų 22 rutuliukai).

!! Beje, sąlygoje trūksta žodžio „mažiausiai“: Ada gali drąsiai traukti ir 24, ir daugiau — net 28 rutuliukus.

B26. (D) 3

! Sakykime, kad kiekvienų trijų tiesėje esančių skaičių suma lygi a. Sudėkime visas tris sumas. Į šią sumą centrinis skaičius x įskaitytas 3 kartus, todėl



$$3a = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 2x,$$

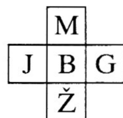
$$3a = 2x + 28, \quad 3a = 2(x + 14).$$

Kadangi $x + 14$ (taigi ir $x - 1$) turi dalytis iš 3, tai x galėtų būti tik 1, 4 ir 7. Visi šie skaičiai tinka: jeigu centre 1, tai tiesėse gali būti $2+7 = 3+6 = 4+5$; jeigu centre 4, tai tiesėse gali būti $1+7 = 2+6 = 3+5$; jeigu centre 7, tai tiesėse gali būti $1+6 = 2+5 = 3+4$. Teisingas atsakymas **D**.

B27. (A) Raudona

? Baltai priešinga negali būti mėlyna ir geltona, taip pat žalia ir juoda sienos, nes jos gretimos. Lieka raudona siena.
Renkamės atsakymą **A**.

! Visai neblogai būtų įsitikinti, kad toks kubas įmanomas. Tai padaryti nesunku. Įsivaizduokime, kad priekinė kubo siena balta, o gretimas atlenkiame. Nepavaizduota liko tik užpakalinė raudona siena. Nesunku įsitikinti, kad kubelis tenkina visas uždavinio sąlygas.
Teisingas atsakymas **A**.

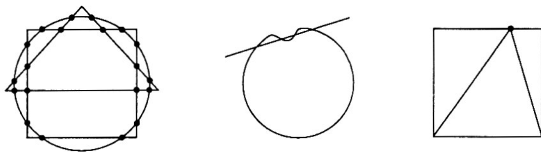


B28. (D) 20

? Paprasčiausias būdas — nusibraižyti reikiamas figūras ir suskaičiuoti susikirtimo taškus. Žinoma, reikia stengtis, kad jos turėtų kuo daugiau susikirtimo taškų. Vadinasi, reikia stengtis, kad trys figūros nesikirstų viename taške. Dabar skaičiuojant susikirtimo taškus galima dar pagudrauti: pavyzdžiui, iš pradžių suskaičiuoti, kiek jų yra ant apskritimo, o tada suskaičiuoti trikampio ir kvadrato susikirtimo taškus. Gauname iš viso $14 + 6 = 20$ susikirtimo taškų.
Renkamės atsakymą **D**.

! Spėjimas palieka vietos abejonėms: o gal mes nusipiešėme ne geriausią piešinį, gal tų taškų gali būti ir daugiau?
Iš pradžių kelkime sau paprastesnį klausimą: kiek daugiausiai susikirtimo taškų gali turėti apskritimas ir kvadratas? Atsakyti į jį nesunku: tiesė gali turėti su apskritimu daugiausiai du bendrus taškus, ir juo labiau tiesės atkarpa. Kadangi kvadratą sudaro keturios atkarpos, tai susikirtimo taškų gali būti daugiausiai 8. Tai ir matome brėžinyje: kiekvienoje kvadrato kraštinėje yra du apskritimo taškai. Dabar jau paprasta atsakyti į kitą klausimą: kiek daugiausiai susikirtimo taškų gali turėti trikampis ir apskritimas? Vėl toks pat samprotavimas rodo, kad daugiausiai galėtų būti 6 taškai. Brėžinys rodo, kad tai įmanoma: kiekvienoje trikampio kraštinėje matome po du apskritimo taškus.

Liko nustatyti, kiek daugiausiai susikirtimo taškų gali turėti trikampis ir kvadratas. Kadangi tiesė gali kirsti kvadratą tik dviejuose taškuose („įeiti" į jo vidų ir „išeiti"), tai trikampis gali kirsti kvadratą daugiausiai 6 taškuose. Brėžinyje vėl matome, kad tai įmanoma.
Vadinasi, jeigu bendrų visoms trims „kreivėms" susikirtimo taškų nėra, tai jų gali būti $8 + 6 + 6 = 20$. Ir vėl iš brėžinio matome, kad tai įmanoma.
Teisingas atsakymas **D**.



!! Ir vis dėlto — kodėl gi tiesė gali kirsti apskritimą tik dviejuose taškuose? Juk užtenka „vos vos įlenkti" apskritimą, ir susikirtimo taškų gali būti keturi ar dar daugiau.
Įrodymas būtų toks.
Tarkime, kad tiesė kerta apskritimą trijuose taškuose. Išveskime į tuos taškus spindulius — jie lygūs. Tad — lygios ir jų projekcijos toje tiesėje. Gauname, kad nuo statmens į tiesę pagrindo mums pavyko atidėti 3 lygias nesutampančias atkarpas, o tai neįmanoma.
Galimas ir algebrinis (kitaip: analizinis) šio fakto įrodymas. Įsiveskime tokią koordinačių sistemą: apskritimo centrą O imkime sistemos pradžia, o x-ų ašį — tiesę, einančią per O ir lygiagrečią duotajai. Vienetinę atkarpą imkime lygią apskritimo spinduliui. Taigi turėsime apskritimą, kurio lygtis yra $x^2 + y^2 = 1$, o tiesės lygtis $y = a$. Reikia įsitikinti, kad su bet kuriuo a sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = a \end{cases}$ turi ne daugiau kaip du sprendinius. Bet tai, aišku, nes lygtis $x^2 + a = 1$ gali turėti ne daugiau kaip du sprendinius.
Imkimės kvadrato. Čia galvoti galima taip. Sakykime, vienas tiesės susikirtimo su kvadratu taškas yra viršutinėje horizontaliojoje kraštinėje. Sujunkime tą tašką su priešingos kraštinės galais. Tada tiesė patenka tik į vieną iš trijų zonų ir gali kirsti tik vieną iš likusių trijų kraštinių. Taigi gauname daugiausiai du susikirtimo taškus.

B29. Ⓐ 123

! Vėl svarbu susidaryti kokią nors skaičiavimo sistemą, kad nei vieno pagaliuko nepražiopsotume.



Išmeskime vertikalius pagaliukus. Kadangi šešiakampių buvo $11 + 10 + 11 = 32$, tai liks keturios laužtės, kuriose yra po 22 grandis. Pridėję išmestus $12 + 11 + 12$ pagaliukus, gausime $88 + 12 + 11 + 12 = 123$ pagaliukus.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Galima skaičiuoti ir taip. Viršutinėje šešiakampių eilėje yra 11 šešiakampių, bet 10 vertikalių pagaliukų yra bendri, taigi turime $11 \cdot 6 - 10 = 56$ pagaliukus. Apatinėje šešiakampių eilėje pagaliukų tiek pat, taigi jau turime $2 \cdot 56 = 112$ pagaliukų. Pridėję 11 vidurinės stačiakampių eilės pagaliukus, gauname 123 pagaliukus.

B30. Ⓒ 91

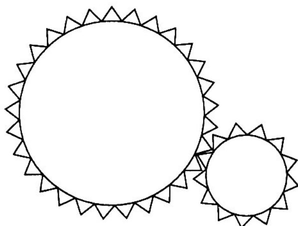
! Pirmajame etape yra 8 grupės po 4 komandas. 4 grupės komandos (a, b, c, d) tarpusavyje sužaidžia 6 susitikimus (ab, ac, ad, bc, bd, cd). Todėl pirmajame etape sužaidžiamos $8 \cdot 6$ rungtynės, ir lieka 16 komandų, t. y. 4 grupės. Jos antrajame etape sužaidžia $4 \cdot 6$ rungtynes, ir lieka 8 komandos, t. y. 2 grupės. Šios trečiajame etape sužaidžia $2 \cdot 6$ rungtynes, ir lieka 4 komandos, t. y. 1 grupė. Ketvirtajame etape sužaidžiamos $1 \cdot 6$ rungtynės, ir lieka 2 komandos, kurios žais finalines vienerias rungtynes. Taigi bus sužaistos $8 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 1 = 15 \cdot 6 + 1 = 91$ rungtynės.
Teisingas atsakymas **C**.

KADETAS (VII ir VIII klasės)

K1. Ⓓ Žr. B21 uždavinio sprendimą.

K2. Ⓑ 3 kartus pagal laikrodžio rodyklę

! Jeigu didesnysis dantratis sukasi prieš laikrodžio rodyklę, tai mažesnysis — pagal. Kadangi mažesnysis dantratis „dantų“ turi 3 kartus mažiau už didesnįjį, tai jis apsisuks 3 kartus.



Teisingas atsakymas **B**.

K3. Ⓔ 84 pakelius, 14 sąsiuvinių

! Remkimės atsakymais ir „prisišaudykime“. Kadangi 84 pakeliuose yra $84 \cdot 24 = 2016$ sąsiuviniai, tai juos nupirkus liktų tik 14 sąsiuvinių. Vadinasi, nei daugiau, nei mažiau sąsiuvinių pirkti negalima. Teisingas atsakymas **E**.

!! Kitas dalykas, jeigu jokių atsakymų nėra. Tada galima samprotauti, pavyzdžiui, taip. Kadangi perkant 100 sąsiuvinių reikia 4 pakelių ir dar 4 sąsiuvinių, tai perkant 2000 sąsiuvinių reikės 20 kartų daugiau — 80 pakelių ir dar 80 sąsiuvinių, t. y. 83 pakelių ir dar 8 sąsiuvinių. Taigi iš viso reikia 83 pakelių ir dar 10 sąsiuvinių. Vadinasi, reikia pirkti 84 pakelius, o tada išdalijus liks 14 sąsiuvinių.
Žinoma, tai nesunku suskaičiuoti ir dalijant kampu.
Kadangi

```
_2002 | 24
 192    83
 _82
  72
  10
```

tai $2002 = 83 \cdot 24 + 10$.

K4. Ⓐ $\frac{7}{8}$

! Kadangi suprastinę gauname $\frac{66}{77} = \frac{6 \cdot 11}{7 \cdot 11} = \frac{6}{7}$, $\frac{555}{666} = \frac{5 \cdot 111}{6 \cdot 111} = \frac{5}{6}$, $\frac{4444}{5555} = \frac{4 \cdot 1111}{5 \cdot 1111} = \frac{4}{5}$, $\frac{33333}{44444} = \frac{3 \cdot 11111}{4 \cdot 11111} = \frac{3}{4}$, tai reikia palyginti trupmenas $\frac{7}{8}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}$. Tai lengviausia padaryti pastebėjus, kad iki 1 joms atitinkamai trūksta $\frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$. Kadangi iš jų mažiausia pirmoji, tai didžiausia iš duotųjų trupmenų yra $\frac{7}{8}$.
Teisingas atsakymas **A**.

K5. Ⓒ 13^{09}

? Tikriname atsakymus. Pradėkime nuo vidurinio pagal laikrodį — **B**. Kadangi 12:39 − 4:53 = = 11:99 − 4:53 = 7:46, o 21:25 − 12:39 = 20:85 − 12:39 = 8:46, tai reikia bandyti didesnį laiką — atsakymą **C**. Skirtumai 13:09 − 4:53 = 12:69 − 4:53 = 8:16 ir 21:25 − 13:09 = 8:16 lygūs.
Renkamės atsakymą **C**.

! Dienos ilgumas yra 21:25 – 4:53 = 20:85 – 4:53 = 16:32. Todėl saulė užims aukščiausią padėtį 4:53 + 8:16 = 12:69 = 13:09.
Teisingas atsakymas **C**.

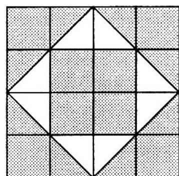
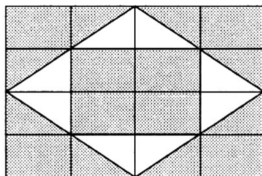
!! Ieškant dienos vidurio užtenka rasti duotųjų laikų vidurkį

$$\frac{4{:}53 + 21{:}25}{2} = \frac{25{:}78}{2} = \frac{26{:}18}{2} = 13{:}09.$$

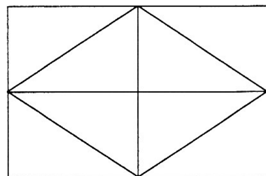
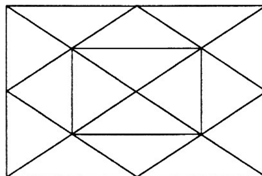
K6. (D) $\frac{3}{4}$

? Kadangi visą laiką kraštinės dalijamos pusiau, tai natūralu tikėtis, kad ieškomos dalies vardiklis bus 2 laipsnis.
Renkamės atsakymą **D**.

?? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo stačiakampio matmenų, tai geriausia imti kvadratą ir jį sudalyti kvadratėliais. Neužtušuota 8 langelių po pusę, t. y. 4 langeliai. Iš viso yra 16 langelių, taigi neužtušuota ploto dalis yra $\frac{1}{4}$, o užtušuota $\frac{3}{4}$. Beje, pradinį stačiakampį taip pat galima sudalyti į 16 lygių stačiakampių.

! Padaliję stačiakampį horizontalia ir vertikalia vidurinėmis linijomis, matome, kad rombo plotas sudaro pusę stačiakampio ploto.

Išvedę stačiakampio įstrižaines, matome, kad vidinis stačiakampis yra pusė rombo. Vadinasi, neužtušuota yra $\frac{1}{4}$ stačiakampio.
Teisingas atsakymas **D**.

K7. (E) 7

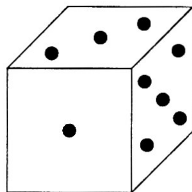
? Pradėkime spėlioti nuo vidurinio atsakymo. Jeigu Andrius suvalgė 6 pyragaičius, tai kitiems dviem vaikams liko 11 pyragaičių, todėl vienas jų suvalgė bent 6. Taigi Andrius turėjo suvalgyti bent 7 pyragaičius. Jeigu jis suvalgė bent 7, tai kitiems liko 10, ir jie galėjo, pavyzdžiui, suvalgyti po 5.
Renkamės atsakymą **E**.

! Sakykime, kad Andrius suvalgė x pyragaičių. Tada kiti suvalgė ne daugiau kaip po $x - 1$ pyragaitį. Vadinasi,

$$x + x - 1 + x - 1 \geqslant 17,$$

todėl $3x \leqslant 19$, $x \geqslant 7$.
Dar reikia įsitikinti, kad tai tikrai įmanoma. Jei Andrius suvalgė 7 pyragaičius, o kiti du 6 ir 4 atitinkamai, tai visos uždavinio sąlygos išpildytos.
Teisingas atsakymas **E**.

K8. Ⓒ 13



! Didžiausia suma galėtų būti $6 + 5 + 4 = 15$, bet tai neįmanoma, nes 5 ir 4 yra priešingose sienelėse. Sumą 14 galima gauti tik sumažinus vieną dėmenį vienetu, t. y. $6 + 5 + 3 = 14$. Bet 6 ir 3 taip pat yra priešingose sienelėse. Tikriname sumą $13 = 6 + 5 + 2 = 6 + 4 + 3$. Paskutinė suma vėl atkrenta (6 ir 3 yra priešingose sienelėse), taigi lieka $6 + 5 + 2$. Tai iš tikrųjų įmanoma: apatinę (6), dešiniąją (5) ir užpakalinę (2) sienelę galima pamatyti vienu metu, tinkamai pasukus kauliuką.
Teisingas atsakymas **C**.

K9. Ⓒ Žr. uždavinio M20 sprendimą.

K10. Ⓒ 3

? Pradėkime spėlioti nuo vidurinio atsakymo. Jeigu slyvų buvo 3 krepšeliai, tai slyvos kainavo 12 eurų, tada 5 krepšeliai kitų vaisių kainavo 11 eurų. Vadinasi, galima imti 4 krepšelius obuolių ir 1 krepšelį slyvų: $4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 11$.
Dabar sakykime, kad slyvų buvo 4 krepšeliai. Tada slyvos kainavo 16 eurų, o likę vaisiai 7 eurus. Bet už juos galima nupirkti daugiausiai 3 krepšelius, nes net pigiausi obuolių 4 krepšeliai kainuotų 8 eurus.
Renkamės atsakymą **C**.

! Sakykime, kad slyvų yra x krepšelių. Tada likusių vaisių krepšelių yra $8 - x$, ir jie kainuoja ne mažiau kaip $(8 - x)2$ eurus. Vadinasi, $4x + (8 - x)2 \leqslant 23$, $2x \leqslant 7$, $x \leqslant 3$. Jau įsitikinome, kad 3 krepšeliai slyvų galėjo būti.
Teisingas atsakymas **C**.

K11. Ⓑ 25 : 8

? Aišku, kad patogu būtų, jei b dalytųsi iš 4 ir iš 5. Imkime $b = 20$, tada $a = 45$, $c = 12$. Vadinasi, $(a - b) : (b - c) = 25 : 8$.
Renkamės atsakymą **B**.

! Žinoma, toks spėjimas — tai beveik sprendimas. Pažymėkime $b = 20x$. Tada $a = 45x$, $c = 12x$, todėl $(a - b) : (b - c) = (25x) : (8x) = 25 : 8$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Kadangi $a : b = 9 : 4$, tai $(a - b) : b = 5 : 4$. Kadangi $b : c = 5 : 3$, tai $b : (b - c) = 5 : 2$. Sudauginę gautas lygybes, gauname $(a - b) : (b - c) = 25 : 8$. Tą patį galima užrašyti įprastiniu būdu. Kadangi $\frac{a}{b} = \frac{9}{4}$, tai atėmę po 1 gauname $\frac{a-b}{b} = \frac{5}{4}$. Kadangi $\frac{c}{b} = \frac{3}{5}$, tai $\frac{c-b}{b} = -\frac{2}{5}$, $\frac{b-c}{b} = \frac{2}{5}$. Padaliję gautąsias lygybes, randame santykį $\frac{5}{4} : \frac{2}{5} = \frac{25}{8}$.

K12. Ⓔ 150

? Imkime vidurinį atsakymą — sakykime, kad bazėje buvo 110 žmonių. Jie per 60 dienų būtų suvalgę $110 \cdot 60$ „davinių“. Visi kartu su priimtaisiais per 50 dienų būtų suvalgę $140 \cdot 50$ „davinių“, o tie skaičiai nelygūs. Taip pat $140 \cdot 60 \neq 170 \cdot 50$. O štai $150 \cdot 60 = 180 \cdot 50$.
Renkamės atsakymą **E**.

! Sakykime, kad bazėje buvo x žmonių. Tada priėmus žvejus iš tralerio jų pasidarė $x + 30$. Sudarome lygtį:

$$x \cdot 60 = (x + 30) \cdot 50.$$

Iš jos $6x = 5x + 5 \cdot 30$, $x = 150$.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Abiem atvejais atmeskime tą maistą, kurį suvalgė bazės žvejai per 50 dienų. Tada per 50 dienų skęstantieji suvalgė tiek, kiek bazės žvejai būtų valgę 10 dienų. Vadinasi, skęstančiųjų buvo 5 kartus daugiau, t. y. 150 žmonių.

K13. Ⓐ 360

! Sakykime, kad šventėje mokinių buvo x. Tada berniukų buvo $0{,}25x$, mergaičių — $0{,}75x$. Mėlynakių berniukų buvo $0{,}125x$, o mergaičių — $0{,}15x$. Vadinasi, $0{,}125x + 0{,}15x = 99$. Dauginame iš 80:

$$10x + 12x = 99 \cdot 80, \quad 22x = 99 \cdot 80, \quad 2x = 9 \cdot 80, \quad x = 9 \cdot 40.$$

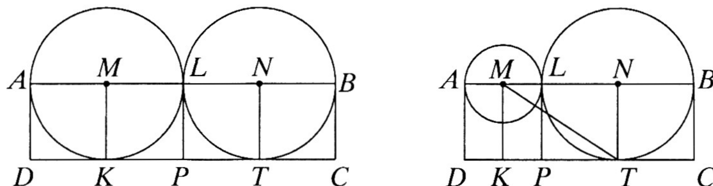
Teisingas atsakymas **A**.

!! Sakykime, kad mokinių buvo $100x$. Tada berniukų buvo $25x$, mergaičių $75x$. Mėlynakių berniukų buvo $12{,}5x$, mergaičių $15x$. Vadinasi, $12{,}5x + 15x = 99$, $25x + 30x = 99 \cdot 2$, $55x = 99 \cdot 2$, $5x = 9 \cdot 2$. Todėl šventėje dalyvavo $5x \cdot 20 = 9 \cdot 2 \cdot 20 = 360$ mokinių.

!!! Žinoma, galima apsieiti ir be iksų. Berniukų šventėje buvo $\frac{1}{4}$ dalis. Vadinasi, mėlynakių berniukų buvo $\frac{1}{8}$. Mergaičių šventėje buvo $\frac{3}{4}$, iš jų mėlynakių buvo $\frac{3}{20}$. Mėlynakių dalyvių dalis buvo $\frac{1}{8} + \frac{3}{20} = \frac{11}{40}$. Kadangi mėlynakių iš viso buvo 99, tai šventėje dalyvavo $99 : \frac{11}{40} = 360$ mokinių.

K14. Ⓑ $\frac{15}{4}$

? Kadangi atsakymas, matyt, nepriklauso nuo spindulio, tai imkime juos lygius. Nuleidę statmenis MK ir LP gauname keturis kvadratus, todėl stačiakampio $MNTK$ plotas (du kvadratai) yra $\frac{15}{2}$, o trikampis MNT sudaro pusę to stačiakampio. Vadinasi, trikampio plotas lygus $\frac{15}{4}$.
Renkamės atsakymą **B**.



! Sąlygos brėžinyje vėl nuleidžiame statmenis MK ir LP. Kadangi $MA = ML$ ir $LN = NB$, tai stačiakampio $MNTK$ pagrindas MN lygus pusei stačiakampio $ABCD$ pagrindo AB, todėl $MNTK$ plotas lygus $\frac{15}{2}$. Kadangi stačiakampį $MNTK$ sudaro trikampis MNT ir jam lygus trikampis, tai ieškomas plotas lygus $\frac{15}{4}$.
Teisingas atsakymas **B**.
Žinoma, tą patį gautume remdamiesi ploto formulėmis.

K15. Ⓒ Žr. uždavinio B20 sprendimą.

K16. Ⓓ Danutė

? Tikrinkime atsakymus. Agnė (A) dovanos neslėpė, nes tada Celestina (C) ir Danutė (D) būtų melavusios. B dovanos neslėpė, nes tada B ir C būtų melavusios. C dovanos neslėpė, nes tada C ir D būtų melavusios.
Renkamės atsakymą **D**.

! Iki pilno sprendimo reikia patikrinti atsakymą **D**. Jei dovaną paslėpė D, tai A, B ir C sakė tiesą, o melavo pati D. Uždavinio sąlyga tenkinama.
Teisingas atsakymas **D**.

K17. Ⓐ Žr. uždavinio B17 sprendimą.

K18. Ⓓ 60%

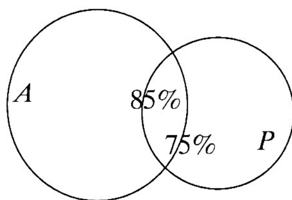
? Tikrinkime atsakymus. Pradėkime nuo vidurinio procento **A**. Jeigu abiem kalbomis kalba 50%, tai vien angliškai kalbėtų 35%, o vien prancūziškai — 25%. Bet tada gyventojų būtų $50 + 35 + 25 = 110(\%)$. Imkime mažesnį procentą.
Jeigu abiem kalbomis kalbėtų 40%, tai vien angliškai kalbėtų 45%, o vien prancūziškai — 35%. Gavome $40 + 45 + 35 = 120(\%)$, vadinasi, einame ne į tą pusę. Reikia imti didesnį procentą.
Jeigu abiem kalbomis kalbėtų 60%, tai vien angliškai kalbėtų 25%, vien prancūziškai 15%. Kadangi $60 + 25 + 15 = 100(\%)$, tai situacija panaši į tikrovę.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi 85% gyventojų kalba angliškai, tai angliškai nekalba 15%, ir jie kalba tik prancūziškai. Panašiai nustatome, kad 25% gyventojų kalba tik angliškai. Vadinasi, po vieną kalbą moka $15+25 = 40(\%)$, todėl abi kalbas moka $100 - 40 = 60(\%)$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Galima sudaryti ir lygtį. Sakykime, kad abiem kalbomis kalba $x\%$. Tada vien angliškai kalba $(85 - x)\%$, o vien prancūziškai $(75 - x)\%$. Gauname lygtį:

$$x + (85 - x) + (75 - x) = 100,$$

t. y. $x = 60$.



!!! Vaizdu naudotis ir skrituliais (vadinamosiomis Veno diagramomis). Kadangi abiejuose skrituliuose yra 100%, tai bendroji skritulių dalis yra $85 + 75 - 100 = 60(\%)$.
Tas pats būdas žodžiais nusakomas taip. Tarp angliškai kalbančių žmonių yra kalbančių vien angliškai ir abiem kalbomis. Todėl jei sudėtume angliškai kalbančių žmonių skaičių ir prancūziškai kalbančių žmonių skaičių, tai į sumą vien angliškai kalbantys žmonės (A) bus įskaityti vieną kartą, vien prancūziškai (P) — vieną kartą, o kalbantys abiem kalbomis (AP) — po du kartus. Todėl atmetus visus po vieną kartą (100%) liks kalbantys abiem kalbomis: $85\% + 75\% - 100\% = 60\%$.
Tą patį galima užrašyti lygybe

$$(A + AP) + (P + AP) = 85 + 75,$$
$$(A + AP + P) + AP = 160,$$
$$100 + AP = 160,$$
$$AP = 60.$$

K19. Ⓐ 5

? Pabandykime padėlioti monetas. Padėkime vieną į kampą a1. Tada „neapšaudytas“ langelis b2. Todėl bandome monetą dėti ne į b2, o toliau, į b3. Dabar analogiškai verta užimti a5, tada b7 ir pagaliau a9. Matome, kad padėtos 5 monetos ir uždavinio sąlygos įvykdytos. Mažesnių atsakymų nėra.
Renkamės atsakymą **A**.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	o	×			o				o
b	×		o				o		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	×	o	×				×	o	×
b	×	o	×				×	o	×

! Neblogai būtų įrodyti, kad 4 monetų neužtenka. Pagalvokime, kiek daugiausiai langelių gali „aptarnauti“ viena moneta: ji užima vieną langelį pati ir gali „apšaudyti“ langelį į kairę, langelį į dešinę ir langelį vertikaliai. Vadinasi, viena moneta gali aptarnauti daugiausiai 4 langelius, o 4 monetos — daugiausiai 16 langelių. Kadangi yra $2 \times 9 = 18$ langelių, tai 4 (arba mažiau) monetų neužtenka. Penkių monetų, kaip jau įsitikinome, gana.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Įdomu, kad toks 5 monetų išdėstymas iš esmės vienintelis (žinoma, galima pradėti ir nuo langelių b1, a9, b9, o ne tik nuo a1, — gausime simetriškas padėtis).
Iš tikrųjų, sakykime, kad nei a1, nei b1, nei a9, nei b9 neužimti. Tada būtinai turi būti užimti langeliai a2 (kad apšaudytų a1) ir b2 (kad apšaudytų b1). Dabar langeliai a3 ir b3 jau apšaudyti. Lygiai taip pat turi būti užimti langeliai a8, b8. Bet tada lieka 6 neaptarnauti langeliai ir tik 1 moneta, kuri gali aptarnauti daugiausiai 4 langelius.
Vadinasi, bent vienas kampinis langelis užimamas. Dėl simetrijos galime laikyti, jog tai langelis a1. Aišku, kad moneta negali būti langelyje b1 — tada 2 monetos aptarnautų tik 4 langelius, o kitoms 3 monetoms liktų net 14 langelių.
Negali moneta būti ir langeliuose a2 ar b2: tada dvi monetos aptarnautų tik 5 langelius, o kitoms 3 monetoms liktų 13 langelių. Bet tada moneta turi būti langelyje b3 — kitaip liks neaptarnautas langelis b2.
Eikime toliau į dešinę. Negali moneta būti langelyje a3 — liktų neaptarnautų 10 langelių ir tik 2 monetos. Negali moneta būti langelyje a4 ar b4 — dešiniau liktų 9 neaptarnauti langeliai. Dabar būtinai moneta turi būti langelyje a5 — kitaip liks neaptarnautas langelis a4.
Ketvirtoji moneta negali būti 6 stulpelyje — paskutinė moneta nesugeba aptarnauti 8 ir 9 stulpelių. Vadinasi, ji yra langelyje b7 — kitaip liktų neaptarnautas langelis b6. Liko neaptarnauti langeliai a8, a9, b9, todėl paskutinė moneta tai gali padaryti tik užėmusi langelį a9.
Įrodėme, kad monetos turi būti išsidėsčiusios žirgo ėjimu pradedant nuo kampinio langelio (kairiame paveikslėlyje pavaizduota padėtis, kai užimamas kampinis langelis a1).

K20. Ⓐ 36

? Sakykime, kad eskalatoriaus (laiptų) ilgis 180 m. Tada Mato greitis 2 m/s, eskalatoriaus greitis 3 m/s. Todėl jų bendras greitis 5 m/s, ir į viršų judančiu eskalatoriumi Matas pakils į viršų per $180 : 5 = 36$ (s).

! Šį sprendimą galima padaryti griežtu sakant: tegu laiptų ilgis yra 180 tam tikrų ilgio vienetų (i). Tada Mato greitis 2 i/s, eskalatoriaus 3 i/s, bendras jų greitis 5 i/s, ir į viršų Matas pakils per (180 i/s) : (5 i/s) = 36 s.

!! Per 1 s Matas įveikia $\frac{1}{90}$ laiptų dalį. Eskalatorius per 1 s įveikia $\frac{1}{60}$ laiptų dalį. Abu per 1 s jie įveikia $\frac{1}{90} + \frac{1}{60}$ laiptų dalį, todėl jiems „kartu“ prireiks $1 : (\frac{1}{90} + \frac{1}{60}) = 180 : (2 + 3) = 36$ sekundžių.

K21. Ⓓ 6

? Nagrinėkime skaičiaus 21 kartotinius. 21 nesidalija iš 9, 42 — nesidalija, o 63 dalijasi. Jo dalikliai yra 1, 3, 7, 9, 21, 63.
Renkamės atsakymą **D**.

! Kadangi n dalijasi iš 21, tai į jo skaidinį pirminiais įeina 3 ir 7. Kadangi n dalijasi iš 9, tai į skaidinį įeina bent du trejetai. Taigi $n = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot d$. Toks skaičius garantuotai turi daliklius 1, 3, 7, 9, 21, 63 ir gal dar kokių nors daliklių. Vadinasi, n turi mažiausiai 6 daliklius. Bet jau žinome, kad skaičius 63 turi lygiai 6 daliklius. Taigi skaičius n dalijasi mažiausiai iš 6 daliklių.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Įrodysime, kad toks n yra vienintelis. Jau žinome, kad $n = 63d$. Jeigu d lygus 1, tai $n = 63$ turi 6 daliklius. Jeigu $d \neq 1$, tai nesunku nurodyti 7 skirtingus n daliklius (gal jų yra ir daugiau): 1, 3, 7, 9, 21, 63, $63d$.

!!! Įdomus būtų toks uždavinys. *Žinome, kad skaičius n, turintis daliklius 9 ir 21, gali turėti 6 daliklius. O kiek mažiausiai jis gali turėti daliklių, jeigu jų yra daugiau kaip 6?*
Kadangi $n = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot d$, $d \neq 1$, tai vardijant n daliklius reikia sekti, kad jie nesikartotų. Pavyzdžiui, jeigu $d = 2k$, tai dalikliai bus

1	3	7	9	21	63
2	6	14	18	42	126.

Pasižiūrėkime, kiek gi bus daliklių, kai $d = 3k$. Tada dalikliai tikrai yra

1	3	7	9	21	63
3	9	21	27	63	189,

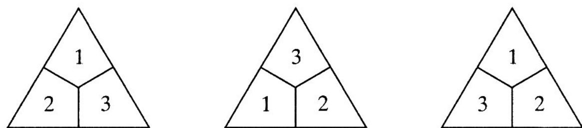
bet antroje eilutėje kartojasi pirmos eilutės skaičiai, išskyrus 27 ir 189. Taigi gauname 8 daliklius. Dar liko pasižiūrėti atvejį $d = 7k$. Tada dalikliai yra

1	3	7	9	21	63
7	21	49	63	147	441,

tik antroje eilutėje jau trys nauji: 49, 147, 441.
Taip pat ne mažiau kaip 12 daliklių gausime, jeigu 2 pakeisime bet kokiu pirminiu, nelygiu 3 ar 5. Vadinasi, skaičius n gali turėti mažiausiai 8 daliklius.
Kitaip sakant, skaičius n gali turėti 6 arba 8 daliklius, bet negali turėti 7 daliklių.
Siūlome skaitytojui patyrinėti, kokias dar reikšmes galėtų įgyti skaičiaus n daliklių skaičius.

K22. Ⓔ 20

! Iš pradžių suskaičiuokime, kiek yra žetonų, sunumeruotų numeriais 1, 2, 3. Jeigu į viršų atsuksime skaičių 1, tai apačioje gali stovėti 2, 3 arba 3, 2. Vadinasi, galimi tik 2 žetonai, jeigu jau pasirinktos 3 konkrečios spalvos. Reikia suskaičiuoti, keliais būdais galima *pasirinkti* 3 spalvas iš 5 galimų.



Tai tas pat, kas suskaičiuoti, keliais būdais galima *atmesti* 2 spalvas iš 5. O tai vėl tas pats, keliais būdais galima *pasirinkti* 2 spalvas iš 5.
Sunumeruokime spalvas: 1, 2, 3, 4, 5. Tada dvi spalvas galima pasirinkti taip:

12	13	14	15
	23	24	25
		34	35
			45

Vadinasi, yra 10 spalvų pasirinkimo būdų. (Galima skaičiuoti ir be lentelės. Pirmą spalvą galima pasirinkti 5 būdais, antrą — keturiais. Vadinasi, dvi spalvas galima pasirinkti $5 \cdot 4 = 20$ būdų. Bet vieną spalvą vadinome pirma, kitą — antra, todėl iš tikrųjų būdų yra dvigubai mažiau: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.)
Kadangi pasirinkti 3 spalvas iš 5 yra 10 būdų, o tas 3 spalvas pasirinkus galima pagaminti 2 skirtingus žetonus, tai iš viso remiantis daugybos taisykle galima pagaminti $10 \cdot 2 = 20$ skirtingų žetonų.
Teisingas atsakymas **E**.

K23. Ⓓ Ketvirtadienis

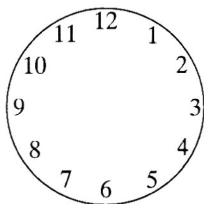
? Atsakymus tikrinti labai lengva. Pradėkime nuo **C**. Jeigu 20 d. buvo trečiadienis, tai 17 d. buvo sekmadienis, ir mėnesio sekmadieniai buvo 3 d., 10 d., 17 d., 24 d., 31 d. — trys nelyginiai sekmadieniai. Matome, kad pirmyn eiti rizikinga, tikriname atsakymą **B**. Jeigu 20 d. buvo antradienis, tai 18 d. buvo sekmadienis, bet tada sekmadieniai buvo 4, 11, 18, 25 d. — iš viso tik keturi.
Taigi apsirikome — rizikinga eiti atgal. Eikime pirmyn. Jeigu 20 d. buvo ketvirtadienis, tai 23 d. buvo sekmadienis, taigi sekmadieniai buvo 2, 9, 14, 23, 30 d. — trys lyginiai.
Renkamės atsakymą **D**.

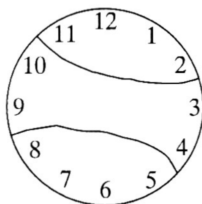
! Mėnesyje daugiausiai gali būti 5 sekmadieniai, ir tai tik tada, jeigu sekmadienis yra mėnesio 1, 2 arba 3 diena. Jeigu I sekmadienis mėnesio 1 d., tai II — 8 d., III — 15 d., IV — 22 d., V — 29 d. Kadangi mėnuo daugiausiai gali turėti 31 d., tai daugiau kaip 5 sekmadieniai nebūna. Maža to, sekmadieniai kaitaliojasi — po lyginio (lyginės mėnesio dienos) eina nelyginis, po nelyginio — lyginis. Todėl pirmas mėnesio sekmadienis turi būti lyginė mėnesio diena. Jeigu jis išpuola 2 d., tai paskutinis išpuola 30 d., bet jeigu jis išpuola 4 d., tai penkių sekmadienių tą mėnesį nebebūna. Vadinasi, sekmadieniai buvo 2, 16 ir 30 d. Kadangi 16 d. buvo sekmadienis, tai 17 d. — pirmadienis, o kadangi $20 - 17 = 3$ ir 4 (ketvirtadienis) $-$ 1 (pirmadienis) $= 3$, tai 20 d. buvo ketvirtadienis.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Nustatėme, kad 3 sekmadieniai lyginiai būna tik tais mėnesiais (išskyrus vasarį), kurie prasideda šeštadieniu.
O dabar — uždavinėlis skaitytojui: *kiek daugiausiai būna mėnesių per metus su trimis lyginiais sekmadieniais?*

K24. Ⓐ 12 ir 3 nėra toje pačioje dalyje

? Kadangi visų ciferblato skaičių suma lygi $1 + 2 + \cdots + 12 = 78$, tai kiekvienos dalies skaičių suma lygi 26.
Jeigu (**E**) 2, 11 ir 9 yra toje pačioje dalyje, tai joje yra ir 10. Kadangi atskirai 10 negali sudaryti vienos iš 3 dalių, tai 10 irgi priklauso tai daliai — per daug.
Jeigu (**D**) 11, 1 ir 5 toje pačioje dalyje, tai 12 priklauso tai daliai — per daug.
Jeigu (**C**) 7 ir 5 yra toje pačioje dalyje, tai joje dar yra ir 6. Kadangi $7 + 6 + 5 = 18$, tai dar trūksta 8. Vadinasi, reikia sudaryti sumą 8 iš dėmenų $1 + 2 + 3 + 4$. Tai įmanoma tik atmetus 2, bet tada dvejetas izoliuojamas į atskirą dalį.
Jeigu (**B**) 8 ir 4 yra toje pačioje dalyje, tai joje yra ir 7, 6, 5 — per daug.
Renkamės atsakymą **A**.





?? Įrodykime, kad 12 ir 3 nėra toje pačioje dalyje. Tarp 12 ir 3 yra 1 ir 2, todėl jeigu 12 ir 3 vienoje dalyje, tai joje yra ir 1, ir 2. Gauname 18, ir iki 26 trūksta 8. Kadangi 1, 2, 3 jau užimti, tai sumą 8 gali duoti tik pats skaičius 8. Bet tada tarp skaičų 3 ir 8 lieka 4, 5, 6, 7, kurių neužtenka gauti 26.

! Iš tikrųjų įrodėme tik tiek: jeigu pavyko ciferblato skaičius padalyti į 3 dalis, kurių kiekvienos skaičių suma lygi 26, tai 12 ir 3 nėra vienoje dalyje. Reikia įrodyti, kad toks padalijimas iš tikrųjų įmanomas. Bet tam užtenka imti $12 + 11 + 1 + 2$, $10 + 1 + 3 + 4$ ir $8 + 7 + 6 + 5$.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Tarkime, kad padalijome ciferblatą į 3 dalis, kurių kiekvienoje esančių skaičių suma lygi 26. Kadangi ciferblate yra tik viena netolydi vieta (kur po 12 eina 1), tai bent viena dalis bus sudaryta iš paeiliui einančių skaičių. Vadinasi,

$$k + (k+1) + \dots + (k+m) = 26,$$

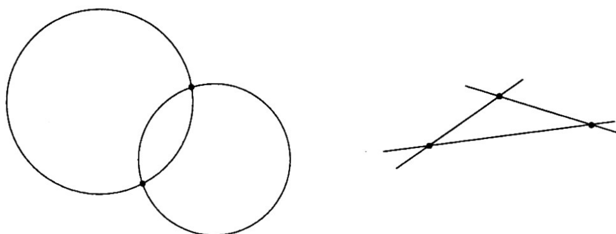
$$\frac{(2k+m)(m+1)}{2} = 26,$$

$$(2k+m)(m+1) = 52.$$

Kadangi $2k \geqslant 2$, tai $(2+m)(m+1) \leqslant 52$, todėl $m \leqslant 5$.
Dabar:
jeigu $m = 1$, tai kairė pusė dalijasi tik iš 2, o dešinė — iš 4;
jeigu $m = 2$, tai kairė pusė dalijasi iš 3, o dešinė — ne;
jeigu $m = 3$, tai $2k + 3 = 13$, $k = 5$;
jeigu $m = 4$, tai kairė dalijasi iš 5;
jeigu $m = 5$, tai kairė dalijasi iš 3.
Vadinasi, tinka tik $m = 3$, $k = 5$, t. y. sudaryta iš paeiliui einančių skaičių grupė yra $5 + 6 + 7 + 8$.
Dabar aišku, kad į grupę, kurioje yra 9, reikia imti ir 10 — kitaip $9 + 4 + 3 + 2 + 1 = 19$ dar per mažai, o $19 + 12$ — jau per daug.
Kai paimame 9 ir 10, trūksta 7, o tai galima padaryti tik paėmus 4 ir 3. Likusi grupė $11+12+1+2$, žinoma, taip pat duoda 26.
Įrodėme, kad vienintelis būdas padalyti ciferblato skaičius į tris dalis taip, kad sumos būtų lygios, yra nurodytasis.

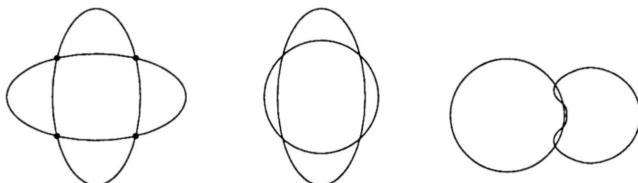
K25. Ⓑ 17

? „Jaučiame“, kad du apskritimai gali turėti daugiausiai du bendrus taškus.



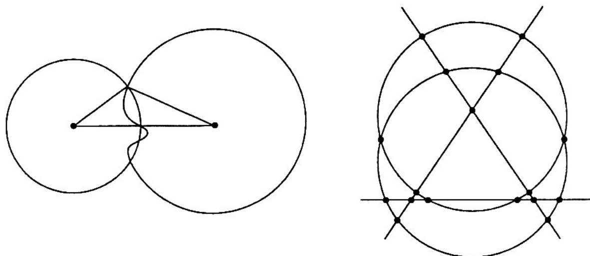
Taip pat aišku, kad trys tiesės daugiausiai kertasi trijuose taškuose.
Kadangi tiesė gali kirsti apskritimą daugiausiai dviejuose taškuose, tai tiesė gali kirsti 2 apskritimus daugiausiai 4 taškuose. Vadinasi, 3 tiesės gali kirsti 2 apskritimus daugiausiai dvylikoje taškų.
Iš viso gauname $12 + 3 + 2 = 17$ taškų.
Renkamės atsakymą **B**.

! Įrodysime, kad 2 apskritimai gali turėti tik 2 susikirtimo taškus.
Beje, jei „apskritimai“ ištempti, tai iš karto gauname daugiau susikirtimo taškų:



Vadinasi, samprotaujant neabejotinai teks remtis apskritimo apibrėžimu.
Taigi tarkime, kad du apskritimai turi bent 3 bendrus taškus. Jeigu apskritimai turi bendrą centrą, tai jie arba sutampa, arba neturi bendrų taškų. Vadinasi, apskritimų centrai skirtingi. Dabar, jeigu

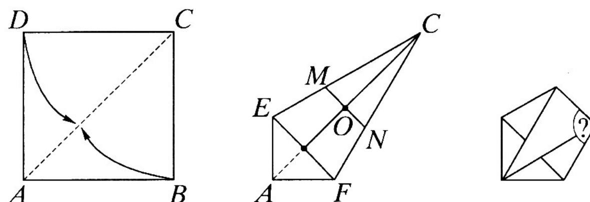
turėtume bent 3 bendrus taškus, tai turėtume bent 3 lygius trikampius, kurių visos kraštinės lygios: dvi iš jų yra apskritimų sipnduliai, o trečia — atkarpa, jungianti tuos du centrus. Bet aišku, kad nuo centrų linijos galima nubrėžti tik du tokius vienodo didumo trikampius — į viršų ir į apačią.



Tai, kad tiesė kerta apskritimą daugiausiai dviejuose taškuose, įrodėme uždavinio B28 sprendime. Vadinasi, daugiausiai gali būti 17 taškų. Brėžinys rodo, kad 17 taškų tikrai gali būti.
Teisingas atsakymas **B**.

K26. Ⓓ 112,5°

? Žinoma, pavojinga pasitikėti brėžiniu ir matuoti ieškomą kampą matlankiu (juo labiau, kad brėžinys gali būti tyčia iškraipytas). Vis dėlto, jeigu pamatavę gauname apie 113°, tai įmanoma iš karto rinktis 112,5°.
Renkamės atsakymą **D**.



! Matome, kad paskutinis lenkimas nebedaro įtakos atsakymui: užlenktas trikampis yra gauto penkiakampio viduje. Todėl mums reikia rasti $\angle MNF$, kur $MN \parallel EF$ ir eina per tašką O, dalijantį AC pusiau. Bet $\angle C = 45°$, trikampis MNC lygiašonis, $\angle MNC = 135° : 2 = 67{,}5°$. Todėl $\angle MNF = 112{,}5°$.

K27. Ⓒ 299

! Pažymėkime Tomo parašytą skaičių n. Tada antras mokinys parašė $n + 1$, trečias $2(n + 1)$, ketvirtas $4(n+1)$ ir t. t. Vadinasi, jeigu Petras buvo buvo k-tasis mokinys, tai jis parašė $2^{k-2}(n+1)$. Gauname lygtį:

$$2^{k-2}(n + 1) = 1000.$$

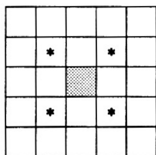
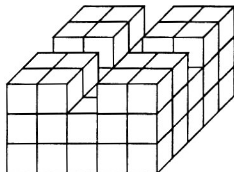
Kadangi 1000 dalijasi tik iš 2^3, tai $k - 2 \leqslant 3$, $k \leqslant 5$. Jeigu $k = 5$, tai $n = 125 - 1 = 124$. Jeigu $k = 4$, tai $n = 250 - 1 = 249$. Jeigu $k = 3$, tai $n = 500 - 1 = 499$. Jeigu $k = 2$, tai $n = 1000 - 1 = 999$. Vadinasi, mūsų lygtyje iš nurodytų atsakymų negali būti tik $n = 299$.
Renkamės atsakymą **C**.

!! Įdomu nustatyti, kiek gi buvo mokinių. Iš karto atrodo, kad iš sąlygos išplaukia, jog Petras buvo paskutinis. Jeigu po Tomo prie lentos prieidavo „mokiniai“, tai Petras buvo ketvirtas, na, gal trečias, bet tik ne antras. Vadinasi, jis negalėjo parašyti 999.
Išeitų, kad Petras negalėjo parašyti nei 299, nei 999. Bet įdėmiau paskaičius sąlygą suvokiame, kad visiškai nebūtinai Petras buvo paskutinis: galėjo būti, kad mokinių buvo daugiau, jie galėjo įrašyti tuos skaičius ir prieš Petrą, ir po Petro, o Petras galėjo būti ir antras (po Tomo), ir trečias, ir t. t.

Taigi vėl grįžtame prie vienintelio skaičiaus, kurio Petras parašyti negalėjo: 299.
Teisingas atsakymas **C**.

K28. Ⓔ 24

Panagrinėkime išorinę sieną.

Tik vieną uždažytą sieną turės kubeliai, pažymėti žvaigždute. Visų kitų bus uždažytos bent dvi sienos. Gauname, kad išorėje bus $4 \cdot 6 = 24$ kubeliai, tenkinantys sąlygą.
Kubeliai, esantys viduje, turės po dvi nudažytas sienas. Tai nesunku matyti iš paveikslėlio, vaizduojančio kubą be viršutinio sluoksnio.
Teisingas atsakymas **E**.

K29. Ⓒ 66 660

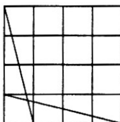
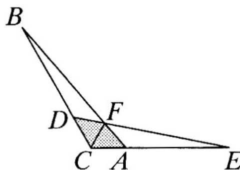
Keturženklį skaičių galima sudaryti $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdais. Iš jų pirmoje vietoje 6 kartus stovės vienetas, 6 kartus — dvejetas, 6 kartus — trejetas ir 6 kartus — ketvertas. Tas pats bus kiekviename skyriuje, taigi gausime

$$6 \cdot (1+2+3+4) \cdot 1000 + 6 \cdot (1+2+3+4) \cdot 100 + 6 \cdot (1+2+3+4) \cdot 10 +$$
$$+ 6 \cdot (1+2+3+4) = 10 \cdot 6666 = 66\,660.$$

Teisingas atsakymas **C**.

K30. Ⓓ $\frac{2S}{5}$

Atspėti atsakymą nesunku, languotame popieriuje nubraižius stačiuosius trikampius. Tada matome, kad $S = 2$ (langeliai), o atsakymai virsta 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{4}{3}$. Bet iš karto matyti, jog keturkampio plotas didesnis už $\frac{1}{2}$ langelio ir mažesnis už visą.
Renkamės atsakymą **D**.

Kadangi $\triangle ABC = \triangle DEC$, tai $\angle FDC = \angle FAC$, o tada lygūs ir papildantys juos iki 180° kampai EAF ir BDF. Tada trikampiai EAF ir BDF lygūs pagal kraštinę $AE = BD = 3$ ir du kampus prie jos. Vadinasi, $FA = FD$, o tada trikampiai FAC ir FDC lygūs pagal tris kraštines. Kadangi $S_{FAC} : S_{FAE} = 1 : 3$, tai $S_{FACD} : S_{FAE} = 2 : 3$. Vadinasi, keturkampio $FACD$ plotas sudaro $\frac{2}{5}$ trikampio CED ploto, taigi lygus $\frac{2S}{5}$.
Teisingas atsakymas **D**.

JUNIORAS (IX ir X klasės)

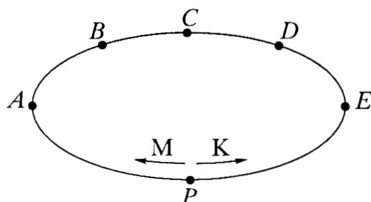
J1. Ⓓ 6

? Tikrinkime atsakymus nuo vidurinio. Jei Danutė suvalgė 5 pyragaičius, tai dviem nepaminėtiems vaikams liko $20 - 5 - 1 - 2 - 3 = 9$ pyragaičiai. Kad ir kaip šie du valgytų, bent vienas iš jų suvalgys bent 5 pyragaičius. O taip būti negali, o tai prieštarautų sąlygai, kad Danutė suvalgė pyragaičių daugiau už kiekvieną kitą vaiką. Jei Danutė suvalgė 6 pyragaičius, tai tiems dviem liko 8 pyragaičiai. Jie gali valgyti po 4 pyragaičius, ir uždavinio sąlygos bus išpildytos.
Renkamės atsakymą **D**.

! Galima įsivesti ir x — Danutės suvalgytų pyragaičių skaičių. Nepaminėti vaikai kiekvienas galėjo suvalgyti ne daugiau kaip $x - 1$ pyragaitį, taigi $2(x-1) + x + 6 \geqslant 20$, $3x \geqslant 16$, $x \geqslant 6$. Vadinasi, įsitikinome, kad Danutė negalėjo suvalgyti mažiau kaip 6 pyragaičius. Bet 6 pyragaičius Danutė suvalgyti galėjo: dviem liktų 8 pyragaičiai, ir jeigu šie suvalgytų po 4, tai uždavinio sąlygos būtų išpildytos (beje, vienas jų galėjo suvalgyti ir 5 pyragaičius).
Teisingas atsakymas **D**.

J2. Ⓔ E

? Nesunku patikrinti atsakymus. Jei jie susitiktų taške C, tai abu nubėgtų vienodai. Vadinasi, reikia eiti į dešinę. Jei jie susitiktų taške D, tai Matas būtų nubėgęs $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ rato, o Kotryna $\frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ rato, o tai nėra triskart mažiau. Jei jie susitiktų taške E, tai Matas būtų nubėgęs $\frac{3}{4}$ rato, o Kotryna — $\frac{1}{4}$ rato. Tai iš tikrųjų trigubai mažiau.
Renkamės atsakymą **E**.

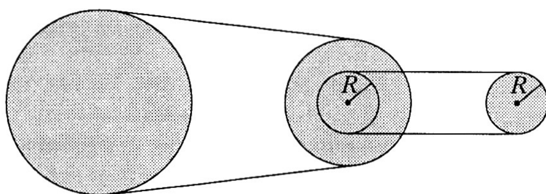


! Kadangi Matas bėga triskart greičiau, tai jo nubėgtas kelias bus triskart didesnis. Kadangi abu jie nubėgs vieną ratą, tai Kotryna nubėgs $\frac{1}{4}$ rato, t. y. iki taško E.
Teisingas atsakymas **E**.

J3. Ⓐ Žr. uždavinio B5 sprendimą.

J4. Ⓑ 200

! Kadangi mažasis ratas su viduriniu sujungti diržu, o vidurinis varomasis skriemulys yra to paties spindulio R kaip ir mažasis ratas, tai jie sukasi tuo pačiu greičiu.

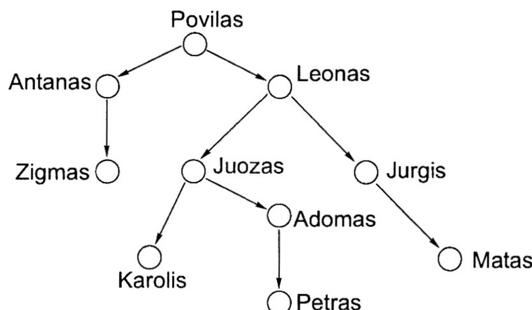


Teisingas atsakymas **B**.

J5. Ⓐ Žr. uždavinio B10 sprendimą.

J6. Ⓓ Zigmas

! Petro tėvas — Adomas, Adomo tėvas — Juozas. Adomo ir jo brolio (Karolio) senelis tas pats — tėvo Juozo tėvas, t. y. Leonas. Senelio brolis yra Antanas, o Antano sūnus — Zigmas.



Teisingas atsakymas **D**.

J7. Ⓑ 6

! Kadangi penkiakampis turi penkias kraštines — briaunas, o kiekvienoje briaunoje susieina dvi sienos, tai mažiausiai yra dar 5 sienos. O tai įmanoma: penkiakampė piramidė turi pagrindą ir 5 šonines sienas.
Teisingas atsakymas **B**.

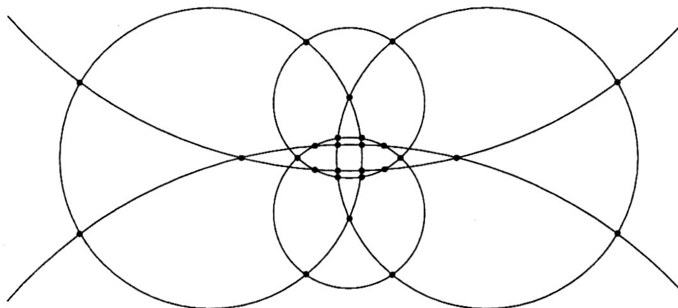
J8. Ⓑ 1

! Nulį iš pirminių dauginamųjų gauname tik dvejetą sudauginę su penketu. Kadangi daugiau dvejetų (beje, ir penketų) tarp pirminių nėra, tai turime vienintelį 0.
Teisingas atsakymas **B**.

J9. Ⓐ Žr. uždavinio B18 sprendimą.

J10. Ⓔ 30

? Galima nusibrėžti 6 apskritimus taip, kad kiekvienas kirstų kiekvieną dviejuose taškuose, o kirtimosi taškai nesutaptų. Suskaičiavę gauname 30 taškų.

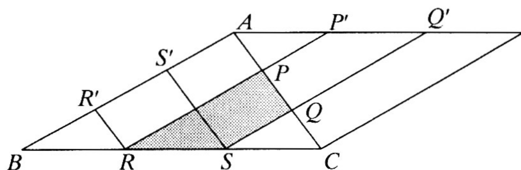


! Uždavinio K25 sprendime jau išsiaiškinome, kad du apskritimai gali turėti tik 2 susikirtimo taškus. Kadangi kiekviena apskritimų pora gali turėti 2 susikirtimo taškus, o skirtingų porų iš 6 apskritimų galima sudaryti 15 (pavyzdžiui, sunumeravę apskritimus skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6, gauname 15 porų: 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56), tai galima gauti ne daugiau kaip 30 taškų. Įsitikinti, kad 30 taškų gauti įmanoma, nesunku brėžiniu.

J11. Ⓒ Žr. uždavinio M20 sprendimą.

J12. Ⓑ $\frac{1}{3}$

? Iš karto matome, kad užtušuotas plotas mažesnis už S_{APRB}, todėl mažesnis už $\frac{1}{2}$. Kadangi trikampio kraštinė dalijama į tris lygias dalis, tai labai panašus būtų atsakymas su vardikliu 3. Renkamės atsakymą **B**.



! Remsimės Talio teorema (tiesiogine ir atvirkštine). Kadangi trikampiai panašūs, tai jų plotai sutinka kaip kraštinių kvadratai. Todėl $S_{QCS} = \frac{1}{9}$, $S_{PCR} = \frac{4}{9}$. Vadinasi, $S_{PQSR} = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Teisingas atsakymas **B**.

!! Dar įdomiau nesiremti jokiomis teoremomis. Papildykime brėžinį iki lygiagretainio. Tada lygiagretainis $SRP'Q'$ sudaro trečdalį didžiojo lygiagretainio ploto, lygaus 2. Todėl $S_{RPQS} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Galima skaičiuoti ir kitaip. Išveskime $SS' \| RR' \| AC$. Tada trikampį ABC sudaro trys lygūs trikampiai ir trys lygūs lygiagretainiai, o užtušuotą plotą — vienas iš tų trikampių ir vienas iš lygiagretainių. Vadinasi, užtušuotas plotas sudaro $\frac{1}{3}$ pradinio trikampio ploto.

J13. Ⓒ 20

! Suskaičiuokime sumą $S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n$. Pridėkime prie abiejų pusių 1, tada $S_n + 1 = 1 + 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n = \cdots = 2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Vadinasi, $S_n = 2^{n+1} - 1$. Raskime sumas, kurios „apglėbia“ skaičių $N = 2\,500\,000$. Kadangi $2^8 = 16^2 = 256$, $2^{10} = 1024$, $2^{20} = 1024^2 < 1100^2 < 1\,210\,000, 2^{21} < 2\,420\,000, 2^{22} = (2^{11})^2 = (2048)^2 > (2000)^2 > 4\,000\,000$, tai reikia palyginti skirtumus $N - S_{20} = N - 2^{21} + 1$ ir $S_{21} - N = 2^{22} - 1 - N$. Tam užtenka sužinoti, kas mažiau:

$$N - 2^{21} + 1 \quad \text{ar} \quad 2^{22} - 1 - N,$$

t. y.

$$2N \quad \text{ar} \quad 2^{22} + 2^{21} + 2,$$

t. y.

$$N \quad \text{ar} \quad 2^{21} + 2^{20} + 1 = 2 \cdot 2^{20} + 2^{20} + 1 = 3 \cdot 2^{20} + 1,$$

t. y.

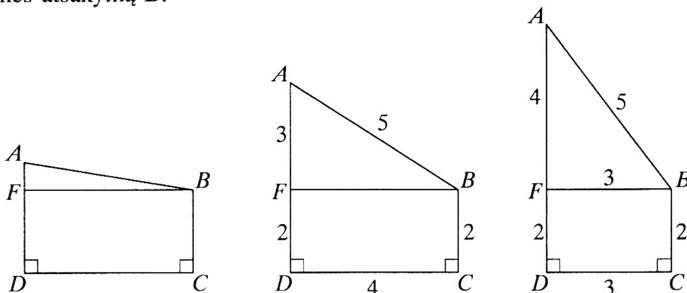
$$2\,500\,000 \quad \text{ar} \quad 3 \cdot 1024^2 + 1.$$

Bet aišku, kad dešinėje stovi daugiau nei $3 \cdot (10^3)^2$, t. y. daugiau nei 3 000 000. Vadinasi, skirtumas yra mažiausias, kai $n = 20$. Teisingas atsakymas **C**.

J14. Ⓑ 2

? Pabandykime tiesiog spėti: jeigu nubrėšime atkarpą BF, lygiagrečią CD, gausime statųjį trikampį ABF. Kadangi AD ir BC natūralieji, tai ir $AF = AD - DF = AD - BC$ natūralus. Natūralus ir $FB = DC$. Vadinasi, stačiojo trikampio AFB kraštinės — natūralieji skaičiai. Žinome tokį trikampį — jo krašinės 3, 4, 5. Tada jei pasirenkame $AF = 3$, $FB = 4$, tai $AB = 5$, ir $2BC =$

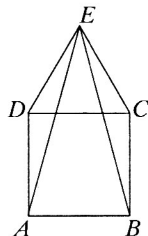
$= BC + FD = 16 - AB - AF - CD = 16 - 5 - 3 - 4 = 4$. Vadinasi, $BC = 2$.
Renkamės atsakymą **B**.



Kadangi $BC \geqslant 1$, $FD \geqslant 1$, tai $AF + FB + AB \leqslant 14$. Bet $AF + FB > AB$, todėl $2AB < 14$, $AB < 7$, t. y. $AB \leqslant 6$. Įžambinė AB negali būti lygi 6, nes tada bent vienas statinis > 3, o nei vienas skirtumas $6^2 - 5^2 = 11$, $6^2 - 4^2 = 20$ nėra kvadratas. Jeigu įžambinė $AB = 5$, tai bent vienas statinis $\geqslant 3$, ir skirtumai $5^2 - 4^2 = 3^2$ ir $5^2 - 3^2 = 4^2$ duoda tą pačią statinių porą: 3 ir 4. Įžambinė AB negali būti $\leqslant 4$, nes nei viena iš statinių porų (1, 1), (1, 2), (1, 3) (2, 2), (2, 3), (3, 3) netinka: statinių kvadratų suma nėra kvadratas.
Vadinasi, yra tik dvi galimybes:
1) $AB = 5$, $AF = 3$, $FB = DC = 4$; tada $FD = BC = 2$.
2) $AB = 5$, $AF = 4$, $FB = DC = 3$; tada vėl $FD = BC = 2$.
Abu atvejai įmanomi, taigi uždavinio sąlygas tenkina trapecijos: $AB = 5$, $BC = 2$, $CD = 4$, $DA = 5$ ir $AB = 5$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DA = 6$. Vis dėlto abiem atvejais kraštinės BC ilgis yra 2.
Teisingas atsakymas **B**.

J15. Ⓐ Žr. uždavinio K20 sprendimą.

J16. Ⓑ 30°



Kadangi $ED = DC = DA$, tai trikampis ADE lygiašonis. Bet $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$, todėl $\angle DEA = 15^\circ$. Taip pat ir $\angle CEB = 15^\circ$. Vadinasi, $\angle AEB = 60^\circ - 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$.
Teisingas atsakymas **B**.

J17. Ⓓ 40

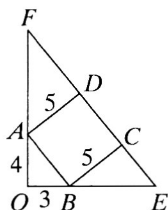
Tikrinkime atsakymus nuo vidurinio. Jeigu (**C**) grupėje iš pradžių buvo 35 mergaitės, tai po pasitraukimo jų liko 20, berniukų buvo 40. Vadinasi, berniukų negalėjo pasitraukti 45. Jeigu (**D**) mergaičių buvo 40, tai po pasitraukimo jų liko 25, berniukų buvo 50. Kai pasitraukė 45 berniukai, jų liko 5, ir tai tikrai 5 kartus mažiau negu mergaičių.
Renkamės atsakymą **D**.

Sakykime, kad iš pradžių mergaičių buvo x. Kai pasitraukė 15 mergaičių, jų pasidarė $x - 15$. Tada berniukų buvo $2(x - 15)$. Sudarome lygtį: $(2(x - 15) - 45)5 = x - 15$. Sprendžiame: $(2x - 75)5 = x - 15$, $10x - 75 \cdot 5 = x - 15$, $9x = 75 \cdot 5 - 15$, $3x = 25 \cdot 5 - 5 = 24 \cdot 5$, $x = 8 \cdot 5 = 40$.
Teisingas atsakymas **D**.

!! Pradėkime nuo „galo“. Sakykime, kad berniukų pabaigoje liko x, mergaičių $5x$. Prieš tai, kai iš grupės pasitraukė 45 berniukai, jų buvo $45 + x$, ir tai yra dukart daugiau negu $5x$ mergaičių. Vadinasi, $45 + x = 10x$, $x = 5$. Vadinasi, iš pradžių buvo $5x + 15 = 40$ mergaičių.

!!! Galima apsieiti ir be x-ų. Sakykime, kad galų gale berniukų liko „pulkelis“. Tada mergaičių buvo likę 5 pulkeliai. Grąžinus 45 berniukus, jų pasidarė 10 pulkelių. Vadinasi, 9 pulkeliai yra 45, 1 pulkelis — 5 žmonės. Vadinasi, iš pradžių mergaičių buvo $5 \cdot 5 + 15 = 40$.

J18. Ⓒ 185



! Kadangi $OB = 3 \cdot 12$, $OA = 4 \cdot 12$, tai $AB = 5 \cdot 12 = AD = BC = CD$. Bet visi keturi statieji trikampiai panašūs, todėl $FD : AD = OA : OB$, $FD : (5 \cdot 12) = 4 : 3$, $FD = 20 \cdot 4$. Panašiai $CE : CB = OB : AO$, $CE : (5 \cdot 12) = 3 : 4$, $CE = 15 \cdot 3$. Taigi $EF = EC + CD + DF =$ $= 15 \cdot 3 + 5 \cdot 12 + 20 \cdot 4 = 5(9 + 12 + 16) = 5 \cdot 37 = 185$.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima apskaičiuoti visą EF iš karto. Kadangi $AF : AD = AB : OB$, tai $AF : (5 \cdot 12) = (5 \cdot 12) :$ $: (3 \cdot 12)$, $AF = 5 \cdot 12 \cdot 5 : 3 = 100$. Todėl $OF = 100 + 48 = 148$. Bet $EF : OF = AB : OA$, taigi $EF : 148 = 5 : 4$, $EF = 5 \cdot 37 = 185$.

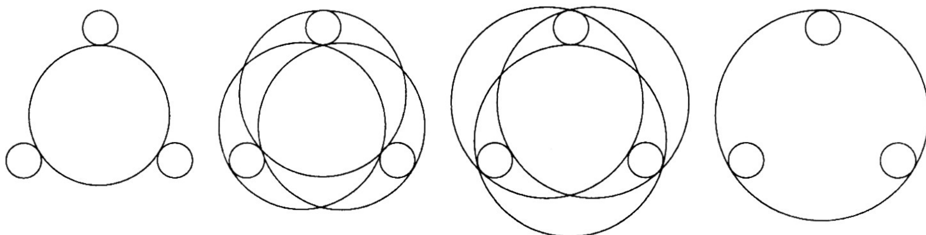
J19. Ⓓ $5000 < y < 15\,000$

? Nesunku suvokti, kad „didelį“ skaičių gausime dalydami $1 : x$. Vadinasi, x čia turi būti „mažas“. Kai iš 1,99 atimame 2, gauname $-0{,}01$. Tada operacija $\frac{1}{x}$ duoda -100. Dabar operacija x^2 duoda 10 000.
Renkamės atsakymą **D**.

! Įrodyti, kad pasirenkamas skaičius yra didžiausias, sunku. Tai įmanoma padaryti atlikus perranką. Beje, perranką galima padaryti mažesnę. Jeigu operacijas pažymėsime raidėmis A, B, C, D, tai nesunku įsitikinti, kad operacijos AB ir BA duoda tą patį rezultatą. Tą patį rezultatą duoda ir operacijos CD ir DC. Negana to, operacijos CC gražina skaičių į pradinę padėtį. Todėl, jeigu ieškome didžiausio rezultato, užtenka peržiūrėti rezultatus po pirmos operacijos, po antros operacijos, ir nebekreipti dėmesio į pasikartojusius. Vis dėlto rezultatų pakankamai daug — apie 60, ir nesinorėtų jų visų išrašinėti.
Pasiimkime realią ribą, pavyzdžiui, 100, ir pagalvokime, kada ji gali būti peržengta. Trečioji operacija — tai viena iš keturių: $x \to x + 3$, $x - 2$, $\frac{1}{x}$, x^2. Aišku, kad jeigu $\frac{1}{10} \leqslant |x| \leqslant$ $\leqslant 10$, tai nė viena operacija neduos skaičiaus, didesnio moduliu už 100. Vadinasi, mums įdomūs tik rezultatai po dviejų operacijų z, duodantys skaičius $|z| > 10$ arba $|z| < \frac{1}{10}$. Po pirmos operacijos iš skaičiaus $x = 1{,}99$ gauname skaičius $x + 3$, $x - 2$, $\frac{1}{x}$, x^2, po antros — skaičius $x + 6$, $x + 1$, $\frac{1}{x+3}$, $(x + 3)^2$, $x - 4$, $\frac{1}{x-2}$, $(x - 2)^2$, $\frac{1}{x} + 3$, $\frac{1}{x} - 2$, x, $\frac{1}{x^2}$, $x^2 + 3$, $x^2 - 2$, x^4. Matome, kad su $x = 1{,}99$ į intervalą $[\frac{1}{10}; 10]$ nepakliūna tik skaičių $(x + 3)^2$, $\frac{1}{x-2}$, $(x - 2)^2$, x^4 moduliai. Po trečios operacijos jie daugiausiai gali duoti atitinkamai $(x + 3)^4$, $\frac{1}{(x-2)^2}$, $\frac{1}{(x-2)^2}$, x^8. Taigi didžiausia reikšmė yra $\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(-0{,}01)^2} = 10^4$, o kitos dvi reikšmės mažesnės: $(x + 3)^4 < 5^4 = 625$, $x^8 < 2^8 = 256$.
Teisingas atsakymas **D**.

J20. Ⓔ 8

! Kiekvienas iš duotųjų apskritimų gali atsidurti tenkinančio sąlygą apskritimo išorėje arba viduje. Jeigu tokio apskritimo viduje nėra duotųjų apskritimų, turime vieną tokį apskritimą.
Jeigu apskritimo viduje yra vienas iš duotųjų, turime tris tokius apskritimus.
Jeigu apskritimo viduje yra du iš duotųjų, vėl turime tris tokius apskritimus. Jeigu apskritimo viduje yra visi trys duotieji, turime vieną tokį apskritimą.



Vadinasi, iš viso yra 8 tokie apskritimai.
Teisingas atsakymas **E**.

J21. Ⓑ 48

? Kadangi kvadrato su tokiu perimetru plotas būtų $8^2 = 64$, tai stačiakampio plotas turbūt bus mažesnis. Nesunkiai atspėjame tinkamo stačiakampio kraštines: 12 ir 4.
Renkamės atsakymą **B**.

! Pasižymėkime ieškomojo stačiakampio kraštines a ir b, $a \leqslant b$. Tada $a+b = 16$ ir reikia nagrinėti a reikšmes nuo 1 iki 8. Atitinkamai plotus ab gauname $1\cdot 15, 2\cdot 14, 3\cdot 13, 4\cdot 12, 5\cdot 11, 6\cdot 10, 7\cdot 9, 8\cdot 8$. Iš jų pasirinkimui duotas tik plotas $4 \cdot 12 = 48$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Perranka matyt ir yra greičiausias būdas. Šiaipjau nesunku įrodyti, kad plotas yra ne didesnis už 64, nes $S = a(16 - a) = -(a^2 - 16a) = 64 - (a - 8)^2$.
Lieka patikrinti atsakymus 24 ir 48. Kadangi a ir b sandauga abiem atvejais dalijasi iš 8, tai bent vienas dauginamasis dalijasi iš 4. Bet kadangi abiejų dauginamųjų suma yra 16, tai ir kitas dalijasi iš 4. Vadinasi, sandauga turi dalytis iš 16, taigi tinka tik 48.

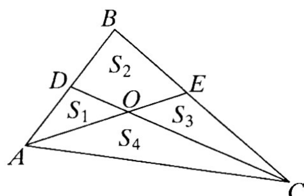
!!! Išskaidę atsakymų skaičius, turime $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3$, $2^2 \cdot 19$, $2^6 \cdot 3$, $2^7 \cdot 3$. Iš karto atkrenta $2^2 \cdot 19$, nes tada bent vienas iš dauginamųjų r ir b būtų 19-os kartotinis. Vadinasi, sandauga ab turi mažiausiai tris dvejetus, o vienas iš dauginamųjų — mažiausiai du dvejetus. Bet kadangi $a+b = 16$, tai ir kitas daugiklis dalijasi iš 4, t. y. turi bent du dvejetus. Nei vienas daugiklis negali turėti trijų ar daugiau dvejetų — tada ir kitas dalytųsi iš 8 ir turėtų bent 3 dvejetus. Bet tada vienas daugiklis turėtų dar ir 3, o tada jis būtų didesnis už $2^3 \cdot 3 > 16$. Taigi lieka keturių dvejetų atvejis, t. y. $2^4 \cdot 3$, o daugikliai tada 2^2 ir $2^2 \cdot 3$.

J22. Ⓒ 8

! Iš viso krovinio yra $150 + 151 + \cdots + 199 = 25(150 + 199) = 349 \cdot 25\,(\text{t})$. Kadangi vienas sunkvežimis veža ne daugiau kaip $12 \cdot 100 = 48 \cdot 25\,(\text{t})$, tai reikia ne mažiau kaip $\frac{349\cdot 25}{48\cdot 25} = \frac{349}{48} = 7,\ldots$, t. y. ne mažiau kaip 8 sunkvežimių. Jiems užtenka imti po 7 konteinerius (kai kuriems liks net mažiau). Bet net sunkiausius 7 konteinerius gali pavežti vienas sunkvežimis:
$150 + \cdots + 156 = (75 + 78)7 = 153 \cdot 7 = 1071\,(\text{t})$.
Teisingas atsakymas **C**.

J23. Ⓐ Ne

? Čia negalime imti „patogaus“ trikampio — gal jam plotai negali būti lygūs, o kitiems — gali. Bet iš akies matyti, kad $S_2 > S_1$.
Renkamės atsakymą **A**.



! Tarkime, kad $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Įsitikinsime, kad tai neįmanoma. Iš tikrųjų, kadangi $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$, tai trikampių ABE ir ACE plotai lygūs, o aukštinė iš viršūnės A bendra. Todėl lygūs ir pagrindai $BE = EC$, t. y. AE — pusiaukraštinė. Lygiai taip pat ir CD — pusiaukraštinė. Bet pagal pusiaukraštinės savybę $AO : OE = 2 : 1$, todėl trikampių AOC ir EOC plotai sutinka kaip pagrindai OA ir OE, nes jų aukštinė iš taško C bendra. Vadinasi, $S_4 : S_3 = 2 : 1$, $S_4 = 2S_3$. Prieštara.
Galima ir nesiremti pusiaukraštinės savybe. Kadangi D ir E — kraštinių vidurio taškai, tai $\triangle BDE$ plotas lygus ketvirtadaliui $\triangle ABC$ ploto. Bet $S_{ABDE} < S_{BEOD}$, — prieštara.

!! Sakykime, kad $S_4 = S_3$. Tada $AO = OE$. Bet tada $S_1 = S_{\triangle AOD} = S_{\triangle OED} < S_{\triangle OEBD} = S_2$. Prieštara.

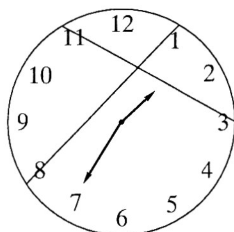
J24. Ⓒ 55%

? Aišku, kad ieškomas vidurkis yra mažesnis už 88 ir didesnis už 44. Tokie skaičiai yra 66 ir 55. Bet 66 gautume, jei mėnesių skaičiai būtų vienodi, o dabar vidurkis sumažės.
Renkamės atsakymą **C**.

! Procentų vidurkis lygus $(3 \cdot 88 + 9 \cdot 44) : 12 = 1 \cdot 22 + 3 \cdot 11 = 55$.
Teisingas atsakymas **C**.

J25. Ⓑ 75°

? Spėjame, kad gretutiniai kampai proporcingi atitinkamų lankų ilgių sumoms: $(3 + 2) : (2 + 5) = 5 : 7$. Kadangi 1 dalis atitinka 30 laipsnių, tai mažesnis iš kampų yra $30° \cdot 5 : 2 = 75°$.
Renkamės atsakymą **C**.



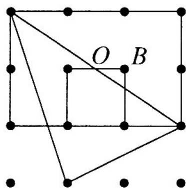
! Ieškomas kampas matuojamas puse atitinkamų lankų sumos, t. y. $(2 + 3) \cdot 30° : 2 = 75°$.
Teisingas atsakymas **C**.

J26. Ⓑ 1

! Sienos yra trikampiai: CAB su kraštinėmis $CA = 8$, $AB = 9$, $BC = 12$; ADB su kraštinėmis $DA = 6$, $AB = 9$, $BD = 12$; ACD su kraštinėmis $CD = 4$, $DA = 6$, $AC = 8$; BCD su kraštinėmis $CD = 4$, $DB = 12$, $BC = 12$. Kadangi surašytų didėjimo tvarka kraštinių santykiai yra $8 : 9 : 12$, $2 : 3 : 4$, $2 : 3 : 4$, $1 : 3 : 3$, tai yra tik viena pora panašiųjų trikampių — ABD ir ACD.
Teisingas atsakymas **B**.

J27. Ⓓ $\frac{11}{12}$

? Iš akies mažojo trikampio kraštinės lygios $\frac{1}{2}$ ir $\frac{1}{3}$, todėl jo plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, todėl ieškomasis plotas lygus $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.
Renkamės atsakymą **D**.



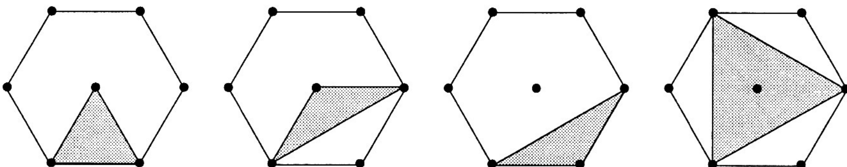
! Matome, kad O yra stačiakampio centras, todėl $OB = \frac{1}{2}$. Kadangi didysis trikampis — pusė stačiakampio — panašus į mažąjį, o jų panašumo koeficientas lygus $3 : \frac{1}{2} = 6$, tai jų plotų santykis lygus 36. Kadangi didžiojo trikampio plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$, tai mažojo plotas $\frac{1}{12}$. Todėl ieškomasis plotas lygus $\frac{11}{12}$.
Teisingas atsakymas **D**.

J28. Ⓓ 80

! Pasižymėkime skaičių $\overline{abcd}$. Pagal sąlygą $10a + b + c + d = 10c + d$, $9a + (a + b) = 9c$. Kadangi $a \neq 0$, tai $9a < 9c$, $a < c$, t. y. $1 \leqslant a \leqslant 8$. Todėl $1 \leqslant a + b \leqslant 17$, o kadangi $a + b$ dalijasi iš 9, tai $a + b = 9$. Gauname, kad $9c = 9a + 9$, t. y. $c = a + 1$, o $b = 9 - a$. Vadinasi, a galima pasirinkti 8 būdais, tada c ir b nustatomi vienareikšmiškai, o d galima rinktis laisvai — 10 būdų. Vadinasi, a ir d galima pasirinkti 80 būdų, ir yra 80 norimų skaičių.
Teisingas atsakymas **D**.

J29. Ⓒ 20

! Iš pradžių žiūrėkime, kiek yra lygiašonių trikampių su viršūne centre. Aišku, kad yra 6 lygiakraščiai trikampiai, kurių kitos dvi viršūnės — gretimos šešiakampio viršūnės, taip pat 6 lygiašoniai trikampiai, kurių kitos dvi viršūnės — šešiakampio viršūnės vieną praleidus. Dabar suskaičiuokime, kiek yra trikampių, kurių viršūnės — šešiakampio viršūnės. Jeigu imame dvi gretimas viršūnes, tai lygiašonį trikampį gauname tik paėmę gretimą trečią viršūnę — kitaip sakant, galime imti 3 paeiliui einančias viršūnes. Tokių trikampių — 6.



Jeigu imame dvi viršūnes vieną praleidę, tai gauname (be jau turėto trikampio) taisyklingąjį trikampį. Aišku, kad tokių trikampių yra 2.
Vadinasi, iš viso gauname $6 + 6 + 6 + 2 = 20$ lygiašonių trikampių.
Teisingas atsakymas **C**.

J30. Ⓐ $9 \cdot 2^{11}$

? Kadangi lyginis 2 laipsnis dalijamas iš 3, duoda liekaną 1, o nelyginis — liekaną 2, tai visų narių liekanų suma yra $2+0+1+1+0+2+2+0+1=9$, todėl ieškomoji suma dalijasi iš 3. Toks yra tik atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.

! Lygybę

$$S = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 10 \cdot 2^{10}$$

padauginkime iš 2:

$$2S = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + 9 \cdot 2^{10} + 10 \cdot 2^{11}.$$

Atimkime pirmą lygybę iš antros:

$$S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{10} - 2^9 - \dots - 2^3 - 2 \cdot 2^2.$$

Bet

$$2 \cdot 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10} = 2^4 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{10} =$$
$$= 2^5 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{10} = \dots = 2^9 + 2^9 + 2^{10} = 2^{10} + 2^{10} = 2^{11},$$

todėl $S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{11} = 9 \cdot 2^{11}$.
Žinoma, $2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}$ galima buvo sudėti remiantis geometrinės progresijos sumos formule.

!! Lygybę

$$S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{10} - 2^9 - \dots - 2^3 - 2 \cdot 2^2$$

padauginkime iš 2, ir iš gautos lygybės

$$2S = 20 \cdot 2^{11} - 2^{11} - 2^{10} - \dots - 2^4 - 4 \cdot 2^2$$

atimkime ankstesnę:

$$S = 10 \cdot 2^{11} - 2^{11} - 4 \cdot 2^2 + 2^3 + 2 \cdot 2^2 = 9 \cdot 2^{11}.$$

SENJORAS (XI ir XII klasės)

S1. Ⓒ Žr. uždavinio J13 sprendimą.

S2. Ⓓ Žr. uždavinio J6 sprendimą.

S3. Ⓑ Žr. uždavinio J7 sprendimą.

S4. Ⓒ Žr. uždavinio J24 sprendimą.

S5. Ⓔ 90

? Kadangi $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, tai natūralu imti $a = 2 \cdot 3$, $b = 5 \cdot 3$, ir gauname $ab = 90$.

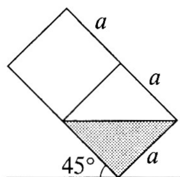
! Kadangi $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, tai $5a = 2b$. Vadinasi, a dalijasi iš 2, $a = 2n$, tada $2b = 10n$, $b = 5n$. Kadangi a ir b didžiausiasis bendrasis daliklis lygus 3, tai $n = 3$. Todėl $a = 6$, $b = 15$, ir sandauga $ab = 90$. Teisingas atsakymas **E**.

S6. Ⓐ 3003

! Kadangi visos prizmės viršūnės priklauso pagrindams, tai jos pagrindas yra 1001-kampis. Vadinasi, yra 1001 šoninės briaunos. Pridėję po 1001 kiekvieno pagrindo kraštinę, gauname 3003 briaunas. Teisingas atsakymas **A**.

S7. Ⓑ 25%

? Išvedus sąlygoje pavaizduoto stačiakampio vidurinę liniją, tarsi aišku, kad vandens yra pusės stiklinės pusė.
Renkamės atsakymą **B**.



! Kadangi stačiojo trikampio vienas kampas lygus 45°, tai ir kitas toks pat. Vadinasi, ir kita to trikampio kraštinė lygi a. Nagrinėkime „pusę" stiklinės padaliję ją pusiau. Savaime aišku, kad pusės stiklinės tūris yra 50%. Vanduo sudaro pusstiklinės pusę — pusstiklinė simetriška vandens paviršiaus atžvilgiu. Taigi vanduo sudaro pusę tų 50%, t. y. 25%.
Teisingas atsakymas **B**.

S8. Ⓔ $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$

? Kadangi 1 radianas $\approx 57°$, tai $\sin 1 \approx \sin 57°$, $\sin 2 = \sin 114° = \sin(180° - 114°) = \sin 66°$, $\sin 3 \approx \sin 171° = \sin 9°$. Kadangi $\sin 9° < \sin 57° < \sin 66°$, tai $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.
Renkamės atsakymą **E**.

! Kadangi $\sin x = \sin(\pi - x)$, tai $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$. Kadangi visi argumentai dabar yra pirmame ketvirtyje ($\pi - 3 < \frac{\pi}{2}$, nes $\frac{\pi}{2} < 3$, o $\pi - 2 < \frac{\pi}{2}$, nes $\frac{\pi}{2} < 2$) ir $\pi - 3 < 1 < \pi - 2$, tai $\sin(\pi - 3) < \sin 1 < \sin(\pi - 2)$ ir $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$.
Teisingas atsakymas **E**.

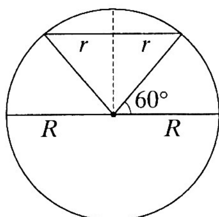
S9. Ⓒ $\frac{1}{12}$

? Sakykime, kad vandens tūris 1. Tada ledo tūris pasidarys $1 + \frac{1}{11} = \frac{12}{11}$. Kai ledas ištirps, vandens tūris vėl bus 1, vadinasi, tūris sumažės $\frac{1}{11}$, o tai sudaro $\frac{1}{11} : \frac{12}{11} = \frac{1}{12}$ tūrio dalį.
Renkamės atsakymą **C**.

! Šiaip sprendimas ? visai geras, tik yra pavojaus supainioti tūrio vienetus ir tūrio dalis. Todėl galime vandens tūrį pažymėti V. Tada ledo tūris bus $V + \frac{1}{11}V = \frac{12}{11}V$. Kai ledas ištirps, tūris vėl sumažės $\frac{1}{11}V$, o tai yra $\frac{1}{11}V : (\frac{12}{11}V) = \frac{1}{12}$ ledo tūrio dalis.
Teisingas atsakymas **C**.

S10. Ⓔ Kitas atsakymas

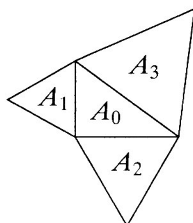
! Pavaizduokime Žemės rutulio pjūvį.



Ieškomos lygiagretės ilgis yra $2\pi r$, Žemės pusiaujo ilgis $2\pi R = 40000$. Kadangi $r = \frac{R}{2}$, tai $2\pi r = \pi R = 20000$. Retas atvejis — teisingo atsakymo tarp konkrečių atsakymų nėra.
Teisingas atsakymas **E**.

S11. Ⓐ $A_1 + A_2 = A_3$

? Prisiminus Pitagoro teoremą norisi rinktis atsakymą **B**, bet taip apsiriktume — prisiminkime tokią Pitagoro teoremos formuluotę: ant stačiojo trikampio įžambinės nubrėžto kvadrato plotas lygus sumai plotų kvadratų, nubrėžtų ant to stačiojo trikampio statinių. Todėl spėjame, kad teisingas atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.



! Jeigu lygiakraščio trikampio kraštinė yra t, tai jo plotas lygus $S = \frac{1}{2}t \cdot t \cdot \sin 60^\circ = t^2\sqrt{3}/4$. Ploto A_1 trikampio kraštinę pažymėkime a, ploto A_2 — b, ploto A_3 — c. Tada pagal Pitagoro teoremą $a^2 + b^2 = c^2$. Padauginkime šią lygybę iš $\sqrt{3}/4$:

$$a^2\sqrt{3}/4 + b^2\sqrt{3}/4 = c^2\sqrt{3}/4.$$

Tai reiškia, kad $A_1 + A_2 = A_3$.
Teisinga lygybė **A**.

!! Patikrinkime, ar tikrai jokia kita lygybė negali būti teisinga kokiam nors stačiajam trikampiui. Pakėlę kvadratu lygybę **A**, gauname $A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 = A_3^2$. Todėl lygybė **B** būtų teisinga tik kai $2A_1A_2 = 0$, o trikampio plotas visada teigiamas. Neteisinga ir lygybė **D**. Jei būtų $A_1 + A_2 = A_3\sqrt{2}$, tai gautume $A_3\sqrt{2} = A_3$, t. y. $\sqrt{2} = 1$.
Sunkiausia patikrinti lygybę **C**.
Jeigu plotas matuojamas kvadratiniais vienetais (pavyzdžiui, kvadratiniais centimetrais), tai lygybė jau neteisinga: neįmanoma sudėti nevienodų dimensijų vienetų. Vis dėlto galima kalbėti apie lygybę, kai nekalbama apie dimensiją. (Pavyzdžiui, galima kalbėti apie kubą, kurio tūris V lygus paviršiui S, $V = S$. Tokio kubo kraštinę pažymėję a, gautume $a^3 = 6a^2$, $a = 6$, t. y. jei kubo kraštinė lygi 6, tai jo paviršiaus plotas lygus 216 ir tūris lygus 216.) Taigi tegul lygybė **C** teisinga. Kadangi

$A_0 = ab/2$, tai $A_1 + A_2 + A_3^2 = 3ab/2$, $a^2\sqrt{3}/4 + b^2\sqrt{3}/4 + (a^2\sqrt{3}/4 + b^2\sqrt{3}/4)^2 = 3ab/2$. Įrodysime, kad galima taip pasirinkti a ir b, kad ši lygybė bus teisinga. Imkime $a = b$, tada

$$a^2\sqrt{3}/2 + 3a^4/4 = 3a^2/2,$$
$$2a^2\sqrt{3} + 3a^4 = 6a^2,$$
$$2\sqrt{3} + 3a^2 = 6,$$

ir aišku, kad reikiamos a ir b reikšmės, $a = b$, egzistuoja: $a = b = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{3}}{3}}$.
Beje, nebūtina imti $a = b$. Imkime, pavyzdžiui, $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($\approx 0{,}87a$). Lygybė **C** virsta tokia:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} + \Big(\frac{7a^2\sqrt{3}}{16}\Big)^2 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}, \qquad \frac{7a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{49a^4\cdot 3}{256} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4},$$
$$\frac{49a^4\cdot 3}{256} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{16}, \qquad 49a^2\sqrt{3} = 80,$$

taigi užtenka imti

$$a = \sqrt[4]{\frac{2^8\cdot 5^2\cdot 3^3}{7^4\cdot 3^4}} = \frac{4\sqrt[4]{675}}{21}, \qquad b = \frac{2\sqrt[4]{675}}{21}\sqrt{3} = \frac{6\sqrt[4]{75}}{21}.$$

Taigi galima sakyti, kad yra tokių stačiųjų trikampių, kuriems teisinga tiek lygybė **A**, tiek ir lygybė **C**. Kad lygybė **C** būtų neįmanoma, užtektų ją pataisyti, pavyzdžiui, taip:

$$A_1 + A_2 + A_3^2 = \sqrt{3}A_0.$$

Tada jos kairė pusė didesnė už dešinę, nes pagal vidurkių nelygybę

$$A_1 + A_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2ab = \frac{ab\sqrt{3}}{2} = A_0\sqrt{3}.$$

Galima būtų pakeisti ir uždavinio klausimą: *Kuri iš lygybių teisinga kiekvienam stačiajam trikampiui?*

S12. Ⓐ REBLAS

? Pagal sandaugos taisyklę žodyne yra $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 6! = 720$ žodžių. Kiekviena raide prasideda $5! = 120$ žodžių. Vadinasi, mūsų žodis prasideda penkta raide, t. y. R.
Antra raidė gali būti kiekviena iš penkių likusių A, B, E, L, S. Su kiekviena jų yra $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4! = 24$ žodžių, vadinasi, mūsų žodis, kurio numeris $537 = 4\cdot 120 + 2\cdot 24 + 9$, yra trečiojoje grupėje žodžių, o jų antra raidė yra E. Bet raidėmis RE prasidedantį žodį duoda tik atsakymas **A**.
Renkamės atsakymą **A**.

! Tęskime toliau. Tarp 24 žodžių, prasidedančių raidėmis RE, trečia raidė gali būti viena iš raidžių A, B, L, S. Su kiekviena iš jų, kai šioje grupėje ji trečia, yra $3\cdot 2\cdot 1 = 3! = 6$ žodžiai. Vadinasi, trečiąja reikia imti antrą iš likusių raidžių — B.
Kadangi $547 = 4\cdot 120 + 2\cdot 24 + 1\cdot 6 + 3$, o su kiekviena ketvirtąja raide tėra $2\cdot 1 = 2! = 2$ žodžiai, tai ketvirtąją raidę reikia imti antrą iš likusių A, L, S, t. y. raidę L. Raidėmis REBL prasideda tik — REBLAS ir REBLSA, taigi mūsų žodis — REBLAS.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Matome, kad spręsdami skaičių 537 išreiškėme faktorialų, padaugintų iš koeficientų, suma, ir koeficientai buvo ne didesni už faktorialo numerį, t. y.

$$537 = 4\cdot 5! + 2\cdot 4! + 1\cdot 3! + 1\cdot 2! + 1\cdot 1!.$$

Nesunku įrodyti, kad kiekvieną skaičių galima vieninteliu būdu išreikšti tokiu faktorialų dariniu. Įrodant praverčia gerai žinoma tapatybė

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

S13. Ⓒ $384\,\text{dm}^2$

? Kadangi nepasakyta, kokie yra išpjauto stačiakampio gretasienio matmenys, tai galime imti „patogiausią" stačiakampį — kubą, kurio kraštinė yra lygi pusei pradinio kubo kraštinės. Pradinio kubo kraštinė $a^3 = 512\,\text{dm}^3$, todėl $a = 8\,\text{dm}$. Mažojo kubo kraštinė lygi 4 dm. Naujojo kūno paviršių sudaro 3 kubo sienos po $64\,\text{dm}^2$ ir 3 sienos, iš kurių išmesta po kvadratą $4\,\text{dm} \times 4\,\text{dm}$ ir dar trys mažojo kubo sienos. Taigi paviršiaus plotas lygus $3 \cdot 64 + 3 \cdot 48 + 3 \cdot 16 = 3 \cdot 64 + 3 \cdot 64 = 6 \cdot 64 = 384\,(\text{dm}^2)$. Renkamės atsakymą **C**.

! Žinoma, nesunku suvokti, kad taip skaičiuodami tris gretasienio sienas atmetame, po to vėl jas pridedame, ir tai teisinga bet kuriam stačiajam gretasieniui. Vadinasi, paviršiaus plotas nesikeičia ir lygus pradinio kubo paviršiaus plotui $6 \cdot 8^2 = 384\,(\text{dm})^2$.

S14. Ⓒ Žr. uždavinio M20 sprendimą.

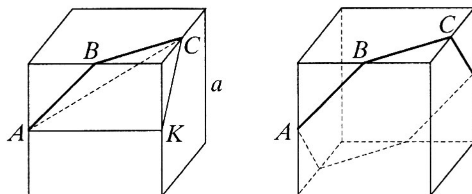
S15. Ⓓ 120°

! Nesunku kampą rasti, pavyzdžiui, iš $\triangle ABC$. Pagal Pitagoro teoremą $AB^2 = BC^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$. Iš stačiojo $\triangle ACK$: $AC^2 = AK^2 + KC^2 = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$. Pagal kosinusų teoremą

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B,$$

$$\frac{3a^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - a^2 \cos B, \qquad \cos B = -\frac{1}{2}, \qquad B = 120^\circ.$$

Teisingas atsakymas **D**.



!! Galima nesiremti kosinusų teorema, o nuleisti statmenį BD į AC. Bet dar gražesnis toks sprendimas. Jungdami toliau kubo briaunų vidurius, gauname taisyklingąjį šešiakampį. Kaip žinome, jo kampas lygus $180^\circ(6-2) : 6 = 120^\circ$.

S16. Ⓔ 5

! Kadangi buvo 10 komandų, tai jos sužaidė $10 \cdot 9/2 = 45$ susitikimus. Jeigu visi susitikimai baigtųsi be lygiųjų, tai susitikimas „duotų" 3 taškus (laimėjusiai komandai 3 taškus, pralaimėjusiai — 0) — iš viso 135 taškus. Lygiosios duoda 1 tašku mažiau (abiem komandoms po 1 tašką) — todėl 5 susitikimai turėjo baigtis lygiosiomis.
Teisingas atsakymas **E**.

!! Gali kilti pagrįstas klausimas — o ar galėjo taip būti? Todėl verta pateikti pavyzdį turnyro, kur taškų suma būtų 130.
Sakykime, kad paskutinė, 10-toji komanda sužaidė lygiosiomis su 9, 8, 7, 6, 5 komandomis, o likusieji susitikimai baigėsi „pagal rangą" — mažesnį numerį turinti komanda laimėjo prieš turinčią didesnį numerį.
Tada I komanda laimėjo prieš likusias — 27 taškai, II komanda prieš tolesnes — 24 taškai, III prieš

žemesnes — 21 taškas, IV prieš žemesnes — 18 taškų. V komanda laimėjo prieš VI–IX, bet sužaidė lygiomis su X komanda — $4 \cdot 3 + 1 = 13$ taškų. VI komanda surinko 3 taškais mažiau — 10 taškų, VII — surinko 7 taškus, VIII — 4 taškus, IX — 1 tašką, o X — 5 taškus (po vieną tašką iš 5 lygiųjų). Iš viso turime $27+24+21+18+13+10+7+4+1+5 = 4(27+1)+13+5 = 4 \cdot 28+18 = 130$ taškų.

S17. Ⓒ 5

! Žinoma, lengva užrašyti lygčių sistemą

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{C},$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{C} + \mathrm{D},$$

$$2\mathrm{A} = 3\mathrm{D}$$

ir ją „išspręsti“: pavyzdžiui, išsireiškę iš pirmųjų dviejų lygčių A ir D, iš trečios lygties turime $2(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = 3(\mathrm{B}-\mathrm{C})$, $\mathrm{B} = 5\mathrm{C}$.
Teisingas atsakymas **C**.

CB A B DC AA DDD

!! Galima sudėti lygybes $2\mathrm{B} + 2\mathrm{C} = 2\mathrm{A}$, $3\mathrm{C} + 3\mathrm{D} = 3\mathrm{B}$, $2\mathrm{A} = 3\mathrm{D}$. Iš karto gauname $\mathrm{B} = 5\mathrm{C}$.

S18. Ⓑ 73%

? Sakykime, kad savikaina buvo 100 litų. Įdiegus naujas technologijas ji tapo 50 litų. Sumažinus darbuotojų skaičių ji pasidarė $0{,}6 \cdot 50 = 30$ litų. Pagaliau patobulinus valdymą ji tapo $0{,}9 \cdot 30 = 27$ litai. Savikaina sumažėjo $100 - 27 = 73$ litais, o tai sudaro 73% pradinės savikainos.
Renkamės atsakymą **B**.

! Sakykime, kad savikaina buvo A litų. Tada įdiegus naujas technologijas ji tapo $0{,}5A$ litų. Sumažinus darbuotojų skaičių, ji pasidarė $0{,}6 \cdot 0{,}5A = 0{,}3A$. Pagaliau patobulinus valdymą ji tapo $0{,}9 \cdot 0{,}3A = 0{,}27A$. Vadinasi, produkcijos savikaina sumažėjo $0{,}73A$ litų, ir tai sudaro 73% buvusios savikainos A.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Matome, kad sprendimas abiem atvejais lygiai toks pat. Tik ar turėjome teisę reikalauti, kad savikaina būtų 100 litų. Nelabai... Bet išeitis paprasta: užtenka pasakyti, kad savikaina buvo 100 (sąlyginių) vienetų — ir nė šuva nesulos.

S19. Ⓐ 100

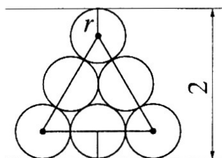
! Achilo greitis 10 m/s, o vėžlio — 0,1 m/s. Vadinasi, atstumas tarp Achilo ir vėžlio kas sekundę sutrumpėja $10 - 0{,}1 = 9{,}9$ (m). Todėl pasivyti Achilui prireiks $990 : 9{,}9 = 100$ sekundžių.
Teisingas atsakymas **A**.

!! Vargu ar verta pradėti galvoti taip: kai Achilas įveiks 10 metrų, tai vėžlys nuropos 0,1 m, ir atstumas tarp jų taps $990 - 9{,}9 = 980{,}1$ (m). Kai Achilas įveiks dar 10 metrų, atstumas sumažės dar 9,9 m ir taps 970,2 m. Žinoma, dabar užtenka paklausti: o kiek gi kartų dar tilps į 970,2 m tie 9,9 m? Bet juk tai tas pats sprendimas — tik pavėluotas pora žingsnių.

S20. Ⓐ $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$

? Iš paveikslėlio aišku, kad 6 spinduliai yra daugiau už 2, o 4 (ir netgi 5) spinduliai — mažiau už 2. Todėl 2 padaliję iš teisingo atsakymo, turime gauti skaičių iš intervalo (4; 6). Atsakymas **B** duoda dalmenį $1 + \sqrt{3} < 4$, **C** — dalmenį $2 + \sqrt{3} < 4$, **D** — dalmenį $4 + 2\sqrt{3} > 6$. O štai **A** duoda

dalmenį $2 + 2\sqrt{3} = 2 + \sqrt{12}$ — skaičių iš intervalo (5; 6).
Renkamės atsakymą **A**.



! Pažymėję apskritimo spindulį r, matome, kad apskritimų centrų linijų sudaryto lygiakraščio trikampio kraštinė lygi $4r$, todėl jo aukštinė lygi $4r \sin 60^\circ = 4r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Vadinasi, $2r + 2r\sqrt{3} = 2$, iš kur $r = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$.
Teisingas atsakymas **A**.

S21. Ⓒ Žr. uždavinio K27 sprendimą.

S22. Ⓔ 110

! Trikampis iš tų 5 tiesės taškų gali turėti 0, 1 arba 2 viršūnes. Jeigu jis viršūnių tarp jų neturi, tai tokių trikampių yra $C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Jeigu trikampis turi iš jų 1 viršūnę, tai kitos 2 viršūnės gali būti pasirinktos $C_5^2 = 10$ būdų, o pirmoji — 5 būdais, ir pagal sandaugos taisyklę turime dar $10 \cdot 5 = 50$ trikampių. Pagaliau, jei dvi viršūnės imamos iš tų penkių, o trečia — iš likusių, tai gauname dar $C_5^2 \cdot 5 = 50$ trikampių. Iš viso gavome 110 trikampių.
Teisingas atsakymas **E**.

S23. Ⓑ 71

? Kadangi $2001 = 3 \cdot 667 = 3 \cdot 23 \cdot 29$, tai aišku, kad rečiausiai pasitaikys reikalingas daugiklis 29, o iki 2001 skaičiaus 29 kartotinių yra 69. Kadangi $69 < 3 \cdot 29$, tai tarp jų yra tik du, į kuriuos įeina 29^2 — tai 29^2 ir $2 \cdot 29^2$. Vadinasi, į 2002! daugiklis 29 įeis $69 + 2 = 71$ kartą.
Renkamės atsakymą **B**.

! Nesunku ir tiksliai suskaičiuoti, kuriuo laipsniu į faktorialo 2002! skaidinį įeina 3 ir 23. Žinoma, užtenka įsitikinti, kad jų yra ne mažiau kaip 71. Bet nuo 1 iki 2001 yra 87 skaičiaus 23 kartotiniai ir $23 \cdot 29$ skaičiaus 3 kartotiniai.
Atsakymas **B** teisingas.

S24. Ⓑ 11 ir 17

? Tikrinkime atsakymus. 12 ir 18 netinka, nes 18 nėra daugiau kaip devyniskart daugiau už 2. 11 ir 17 tinka, nes visos trys sąlygos išpildytos.
Renkamės atsakymą **B**.

! Pasižymėkime skaičius x ir y. Tada $x + y > 27$, $x > 2(y - 12)$, $y > 9(x - 10)$, t. y.

$$x + y > 27,$$
$$x + 24 > 2y,$$
$$y + 90 > 9x.$$

Prie padvigubintos I nelygybės pridėję II, gauname $3x > 30$, t. y. $x > 10$. Prie II nelygybės pridėję padvigubintą III, gauname $204 > 17x$, t. y. $x < 12$.
Vadinasi, $x = 11$. Tada iš antros nelygybės $y < 18$, todėl $y = 17$.
Teisingas atsakymas **B**.

!! Tą patį galima gauti ir šiek tiek kitaip. Iš II ir III nelygybės $x > 2y - 24 > 2(9x - 90) - 24 = 18x - 204$, $17x < 204$, $x < 12$. Panašiai iš I ir II nelygybės $x > 2y - 24 > 2(27 - x) - 24 = 30 - 2x$,

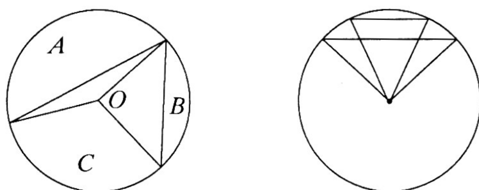
$3x > 30$, $x > 10$. Todėl $x = 11$ ir t. t. Žinoma, galima vertinti ir y. Iš II ir III nelygybės $y > 9x - 90 > 9(2y - 24) - 90 = 18y - 9 \cdot 34$, $17y < 9 \cdot 34$, $y < 18$, o iš I ir III nelygybės $y > 9x - 90 > 9(27 - y) - 90 = 9 \cdot 17 - 9y$, t. y. $10y > 153$, $y \geqslant 16$.
Tikrinkime $y = 16$. Tada iš nelygybių $x > 11$, $x > 8$ ir $9x < 96$, bet jos prieštaringos. Jeigu $y = 17$, tai iš nelygybių $x > 10$, $x > 10$ ir $9x < 107$ gauname $x = 11$. Vėl gavome tą patį atsakymą.

S25. Ⓒ 8

! Sakykime, kad turime trikampį, kurio viršūnės yra taisyklingojo dešimtkampio viršūnės. Kiekviena kraštinė jungia galus lankų, esančių trikampio išorėje, kuriuos sudaro vienas ar daugiau apskritimo dešimtadalių. Kadangi tų lankų suma lygi 10, tai turime sumas $8 + 1 + 1$, $7 + 2 + 1$, $6 + 3 + 1$, $6 + 2 + 2$, $5 + 4 + 1$, $5 + 3 + 2$, $4 + 4 + 2$, $4 + 3 + 3$. Jos ir atitinka 8 skirtingus trikampius.
Teisingas atsakymas **C**.

S26. Ⓑ $\frac{\pi}{3}$

? Skritulio plotas lygus π. Kadangi išpjova sprendžiant iš brėžinio lygi skritulio trečdaliui, tai jos plotas lygus $\frac{\pi}{3}$.
Renkamės atsakymą **B**.



! Pažymėkime nuopjovos lanko didumą radianais φ. Tada išpjovos su tuo lanku plotas lygus $\frac{\varphi}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\varphi}{2}$, o trikampio plotas $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin\varphi$, taigi nuopjovos plotas $\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi}{2}$. Nesunku atspėti, kad nuopjovos B kampas $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Toks kampas φ tikrai duoda nuopjovos plotą $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Panašiai nuopjovos A kampas $\varphi = \frac{5\pi}{6}$, nes toks kampas duoda nuopjovos plotą

$$\frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12} - \frac{1}{4}.$$

Vadinasi, išpjovai C lieka kampas $2\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = \frac{12-1-3}{12}\pi = \frac{2\pi}{3}$, todėl jos plotas lygus $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3}$.

!! Sprendime liko neaiški vieta: ar nuopjovos plotas vienareikšmiškai nustato jos kampą? O gal dvi skirtingų kampų nuopjovos duos tą patį plotą? Geometriškai tai akivaizdu (žr. dešinį brėžinį). Bet dar paprasčiau taikyti išvestinę: kampams $0 < \varphi < \pi$ turime $S(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi$, $S'(\varphi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$. Vadinasi, kampui didėjant didėja ir nuopjovos plotas.

S27. Ⓑ 2 005 003

! Skaičiaus 10^{2002} užraše yra vienetas ir 2002 nuliai, bet jo skaitmenų suma lygi 1, todėl mus domina tik 1-ženkliai, 2-ženkliai, ..., 2002-ženkliai skaičiai.
Jeigu pirmas skaitmuo 2, tai prie jo galima prirašyti 0, 1, 2, ..., 2001 nulį — iš viso 2002 skaičiai.
Dar skaičius gali prasidėti 1. Suskaičiuokime, kiek yra tokių norimų skaičių.
Skaičius gali turėti dar vieną skaitmenį — tokių skaičių 1, būtent 11.
Skaičius gali turėti dar du skaitmenis — jų 2, būtent 110 ir 101.
Skaičius gali turėti dar 3 skaitmenis — jų 3, vienetą galima rašyti 3 vietose.
. . . .
Skaičius gali turėti dar 2001 skaitmenį — jų yra 2001.

Gavome $1+2+\cdots+2001$ vienetu prasidedančių skaičių.
Vadinasi, iš viso norimų skaičių yra

$$1+2+\cdots+2001+2002=\frac{2003\cdot 2002}{2}=2003\cdot 1001=2\,005\,003.$$

Teisingas atsakymas **B**.

S28. Ⓒ 7

? Pradėkime nuo vidurio. Imdami 7 litrus, gauname koncentraciją $\frac{14\cdot 18+7\cdot 90}{21}=2\cdot 6+30=42$.
Renkamės atsakymą **C**.

! Žinoma, gautas atsakymas vienintelis. Sudarykime lygtį jam gauti. Pažymėkime keičiamą kiekį x litrų. Tada naujoji koncentracija bus $\frac{(21-x)18+x\cdot 90}{21}=42$. Todėl

$$21\cdot 18+72x=42\cdot 21,$$
$$7\cdot 9+12x=7\cdot 21,$$
$$12x=7\cdot 12,$$
$$x=7.$$

Taigi reikia 90% rūgšties tirpalu pakeisti 7 ℓ esamo skysčio.
Teisingas atsakymas **C**.

!! Galima apsieiti ir be lygties. Iš pradžių tirpale yra $21\cdot 0{,}18\,\ell$ grynos skruzdžių rūgšties, po pakeitimo — $21\cdot 0{,}42\,\ell$. Vadinasi, grynos rūgšties turi padaugėti $21\cdot 0{,}24\,\ell$. Pakeitus $1\,\ell$, grynos rūgšties padaugėja $0{,}90-0{,}18=0{,}72\,\ell$. Todėl pakeisti reikia $21\cdot 0{,}24:0{,}72=21:3=7\,(\ell)$ skysčio.

S29. Ⓐ $\frac{19}{10}$

? Pabandome parinkti sąlygą tenkinantį trejetą. Tai greitai pavyksta: $a=1$, $b=2$, $c=4$ — iš tikrųjų, $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$. Tada ieškomasis skaičius lygus $\frac{1}{6}+\frac{2}{5}+\frac{4}{3}=\frac{1+8}{6}+\frac{2}{5}=\frac{3}{2}+\frac{2}{5}=\frac{19}{10}$.
Renkamės atsakymą **A**.

! Nesunku suskaičiuoti norimą sumą S bendru atveju:

$$S+3=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}=$$
$$=(a+b+c)\Big(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\Big)=7\cdot\frac{7}{10},$$

todėl $S=\frac{49}{10}-3=\frac{19}{10}$.
Atsakymas **A** teisingas visada.

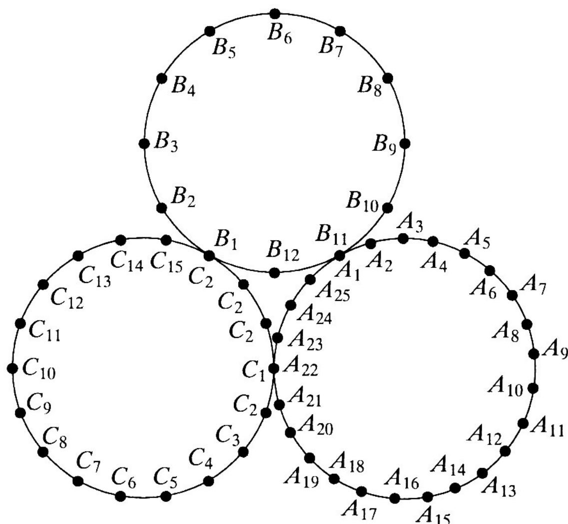
!! Galima veikti ir atvirkščiai. Sudauginę duotąsias lygybes, gauname

$$\frac{49}{10}=\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}=$$
$$=1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}=$$
$$=3+S,$$

todėl $S=\frac{19}{10}$.

S30. Ⓑ 6

? Iš A_1 galima pasiekti A_3, A_5, ..., A_{25}, A_2, A_4, ..., A_{24}, A_1 — vadinasi, visus apskritimo A taškus. Perėjus iš A_1 į apskritimą B galima pasiekti B_1, B_3, ..., B_{11}, B_1. Iš B_1 galima patekti į apskritimą C — į C_{18}, C_2, C_4, ..., C_{16}, C_{18}. Bet iš A_{22} taip pat galima patekti į C_3, C_5, ..., C_{17}, C_1. Vadinasi, iš A_1 galima patekti į visus taškus, išskyrus B_2, B_4, ..., B_{12}.
Renkamės atsakymą **B**.



! Iš pateikto sprendimo **?** jau aišku, kad į B_2, B_4, ..., B_{12} patekti negalima. Įrodysime tai kiek griežčiau. Tarkime, kad mes radome kelią iš A_1 į B_{2k}. Tada yra ir kelias iš B_{2k} į A_1. Bet jeigu patekome į tašką B su lyginiu numeriu, tai mes visą laiką ir suksimės B taškuose su lyginiais numeriais, o pereiti į apskritimą A ir C negalėsime — tai galima padaryti tik iš „nelyginių“ taškų B_1 ir B_{11}.
Teisingas atsakymas **B**.

Kengūra 2002 Atsakymai
Кенгуру 2002 Ответы
Kangur 2002 Odpowiedzi

Užduoties Nr. / Nr. zadania	Grupė/Grupa				
	M	B	K	J	S
1	C	B	D	D	C
2	B	C	B	E	D
3	D	D	E	A	B
4	E	C	A	B	C
5	C	A	C	A	E
6	D	D	D	D	A
7	C	D	E	B	B
8	A	C	C	B	E
9	C	E	C	A	C
10	A	A	C	E	E
11	E	C	B	C	A
12	C	D	E	B	A
13	A	A	A	C	C
14	E	B	B	B	C
15	D	A	C	A	D
16	C	D	D	B	E
17	B	A	A	D	C
18	B	A	D	C	B
19	D	B	A	D	A
20	C	C	A	E	A
21	C	D	D	B	C
22	D	A	E	C	E
23	E	A	D	A	B
24	D	E	A	C	B
25		A	B	B	C
26		D	D	B	B
27		A	C	D	B
28		D	E	D	C
29		A	C	C	A
30		C	D	A	B
	М	Б	К	Ю	С
№ задания	Группа				

KENGŪRA 2002
Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai
Sudarė Juozas Mačys